DELLE CORDE

OVVERO

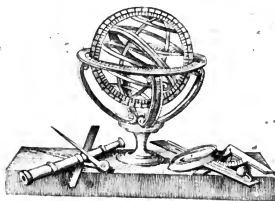
FIBRE ELASTICHE

SCHEDIASMI

FISICO-MATEMATICI

DEL CONTE

GIORDANO RICCATI

NOBILE TREVIGIANO.

IN BOLOGNA MDCCLXVII.

NELLA STAMPERIA DI SAN TOMMASO D'AQUINO.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

PREFAZIONE.

SE mai si può sperare con fondamento di scoprire, o di porre in chiaro parecchie fisiche verità, egli è certamente quando si prende a maneggiare un qualche speciale argomento. Il piacere della musica mi ha invogliato di spendere non poche meditazioni intorno le corde solide, e fluide, colle quali essa compone la maggior parte de' suoi stromenti; ed avendo in varj tempi orto schediasmi distesi sopra questa materia, li ho nuovamente ripigliati per mano, e ritoccati qua e la, onde con meno di verecondia possano al pubblico presentarsi.

I. La proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze, che le producono, non era stata per ancora rettamente determinata. Richiedeva la soluzione di questo problema la preconoscenza d'una proprietà delle corde elastiche, cioè ch' esse ripugnano alla distensione anche prima che sia loro applicata veruna forza stirante: alla quale ripugnanza io do nome di rigidità naturale, per distinguerla dall' artificiale, che si eguaglia alla forza tendente, da cui viene accresciuta la renitenza delle corde a lasciarsi di bel nuovo allungare. Con tale sicura scorta io sono nello Schediasma I. pervenuto felicemente alla meta, e la perfetta corrispondenza fra la teorica e gli sperimenti mi assicura di non aver traviato.

Mi è riuſcito altresì di ſcoprire il tempo, in cui una corda ſi vibra per lungo, mentre il peſo ad eſſa attaccato a vicenda aſcende, o diſcende. La trovata legge di oſcillazioni è diverſa da quella, che regola le vibrazioni traſverſali delle corde a due ſcannelli appoggiate. Se una corda ſi vibra per lungo, ſi pongono in moto la maſſa della corda, ed il peſo tendente: ma ſe oſcilla di traverſo, ſi muove la ſola ſua maſſa. In oltre trattandoſi delle oſcillazioni per lungo, va meſſa in computo la rigidità naturale della corda, la quale nulla altera le minime vibrazioni traſverſali della corda medeſima.

Merita rifleſſione la rigidità grande delle corde di metallo, equivalendo a libre $1134\frac{7}{13}$ la naturale rigidità della corda di ottone teſa dal peſo di due libre da me nelle ſperienze adoprata. Biſogna per altro diſtinguere la rigidità, che ripugna alle diſtenſioni delle corde, dalla tenacità, che ne impediſce il rompimento ſino ad un certo ſegno. Facendo uſo della regola ſtabilita dall' accuratiſſimo M. Sauveur, ho trovato, che la tenacità della teſtè mentovata corda di ottone era incomparabilmente minore della rigidità, ſiccome quella che ſi eguagliava ſoltanto a libre 12. in circa.

II. Col mezzo degli ſteſſi diſcorſi uſati nello Schediaſma I. giungo nello Schediaſma II. a diſcoprire la proporzione fra le compreſſioni di qualſivoglia fluido, e le forze, che le producono. La formola eſprimente la detta proporzione ci moſtra a dito, che poſta uguale a nulla la rigidità naturale del fluido, ſi dilaterebbe queſto infinitamente, qualora non foſſe da forza veruna compreſſo. Ora ella è tale la natura dell' aria di tanto maggiormente rarefarſi, quanto più ſcema il peſo premente; e per conſeguenza eſſa è priva fiſicamente di naturale rigidità, e tutta la ſua ripugnan-

gnanza a nuova costipazione dalla rigidità artificiale uguale alla pressione, che soffre, unicamente dipende. In oltre l' aria si vibra colle leggi di un pendolo a cicloide, quando agitata da un corpo sonoro ce ne porta il suono all' orecchio. Questo fluido frattanto non potrebbe oscillare in sì fatta guisa, se le sue densità non fossero proporzionali ai pesi comprimenti almeno nelle minime compressioni: ed essendomi riuscito di provare, che se le densità si adattano ad una tal legge nelle infinitesime costipazioni, la debbono accettare parimente nelle finite; ella è chiaramente dimostrata la proprietà dell' aria ammessa dal comune de' fisici, che le sue densità seguitano delle forze comprimenti la proporzione. Gli esperimenti sono favorevoli alla teorica quanto il comportano le particole eterogenee miste coll' aria, le resistenze, che nell' effettuare i detti esperimenti si deggiono superare, e lo scemamento, o l' aumentazione del calore nell' aria, che l' elasticità ne diminuisce, o ne accresce.

III. Il Co· Jacopo Riccati mio Padre nel Tomo I. de' Supplementi al Giornale d' Italia ha trattato prima di ogni altro della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. Suppone egli, che la forza dell' obbietto agisca tutta raccolta nel punto medio di ciascuna fibra dell' organo, la quale piegandosi formi un angolo; che risolta la forza in due, che tirino direttamente le due metà della fibra, cagionino esse forze le distensioni nelle mentovate due metà; e che per ultimo le distensioni sieno proporzionali alle forze, che le producono. Ritenuta soltanto la prima supposizione, e fatta la riflessione, che gli allungamenti nelle due metà della fibra non sono generati dalle forze, che le tendono direttamente, ma bensì dagli accrescimenti di tensione, che sostengono, mentre la fibra

si va

si va ripiegando; determino la proporzione fra le forze applicate a squadra alla metà delle fibre, o corde tese, e le saette, le distensioni, e gli accrescimenti di tensione, che le dette forze nelle nominate fibre cagionano.

Colla stessa occasione ragiono della relazione fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono cagionare: e dopo aver notato le alterazioni, che producono nelle saette, nelle distensioni, e negli aumenti di tensione le varie misure delle lunghezze, delle tensioni, e delle rigidità delle fibre; passo alle conseguenze fisiche, e metto sotto gli occhi di chi legge i vantaggi, ed i discapiti degli organi, e quali effetti ne derivino in riguardo alle sensazioni.

Le saette determinate dalla mia teorica le paragono con quelle somministrate dalla sperienza, l' esatissima misura delle quali la rettifico col mezzo dei suoni delle due metà della corda piegata in angolo dalle forze, che producono le mentovate saette. Quantunque gli esperimenti vadano d' accordo colla teorica con quella maggiore fisica adequazione, che in tali ricerche può mai sperarsi; non lascio di avvertire, che se alla metà della corda si applicassero forze notabilmente più grandi delle usate nelle sperienze che riferisco, ne risulterebbero saette alquanto minori di quelle, che richiede il mio canone; perchè in esso si è trascurata la resistenza, che a cagione della sua grossezza parisce la corda nello piegarsi in tre siti, cioè a dire a mezzo, e nelle due estremità.

IV. Non si otterrà mai di trovare il tempo, in cui una corda fa una vibrazione, se prima non si determina la figura, alla quale nello vibrarsi si adatta. Nella soluzione di questo problema io da prima ho seguito il metodo dell' acutissimo Signor Taylor. Non si è accorto il lodato Scrittore, che la costante da determinarsi dopo la seconda integra-

tegrazione poteva ricevere infiniti valori, ai quali corrispondono altrettante figure, a cui è concesso alla corda di adattarsi, mentre si vibra. Può dunque essa oscillare intera con un solo ventre di oscillazione, o divisa in parti eguali con tanti ventri di oscillazione collocati a vicenda uno al contrario dell' altro, quante sono le parti uguali.

Per intero compimento della soluzione del problema non ho tralasciato di provare, che conformata la corda ad una delle curve determinate, e cominciando poi a vibrarsi, si adatta sempre in qualunque istante ad una curva di simil natura. E conciossiachè le corde esempigrazia di un gravicembalo si sogliano incitare all' oscillazione con una penna, che in angolo le ripiega, mi è riuscito di dimostrare, che non ritengono questa figura, ma posto, che rendano un suono solo, ben presto si adattano a quella fra le nostre curve, che ha un solo ventre di oscillazione. Chi confronterà la dimostrazione del Sig. Taylor colla mia, spero, che di questa resterà più contento; non avendo egli avvertito esserci bisogno della comunicazione del moto fra le particole contigue della corda, acciocchè tutti i suoi punti possano essere nello stesso istante forniti di forze acceleratrici, e di velocità proporzionali agli spazj, che rimangono loro da scorrere.

Dopo le premesse specolazioni non è stato difficile il ritrovare il tempo impiegato da una corda tesa nel fare una vibrazione. La formola, a cui si perviene c' insegna, che i tempi d'una vibrazione della stessa corda sono proporzionali ai termini della serie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c., secondochè oscilla intera, o divisa in due, tre, quattro, &c. parti eguali; e stando i numeri delle vibrazioni effettuate in pari tempo, per cui soglio esprimere i suoni, in ragione reciproca delle durate d' una vibrazione, la corda po-

potrà produrre i suoni dinotati dalla progressione 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Essendo questi soli i suoni, che sono atte a rendere le trombe marina, e da fiato, ed il corno da caccia, la mia teorica spiega chiaramente cotale fenomeno.

Una corda frattanto non ci fa solamente sentire i detti suoni l' uno dopo dell' altro, ma gli unisce tutti insieme, la quale stupenda proprietà con alcuni sperimenti faccio toccar con mano. Da questa stessa proprietà si deduce la legge della comunicazione dei tremiti sonori da una corda all' altra, e col mezzo di essa si rende ragione della bellissima esperienza del celebre Signor Giuseppe Tartini, il quale ha scoperto, che stimolate coll' arco due corde del violino, i di cui suoni si esprimano con numeri fra loro primi, purchè il più picciolo di questi numeri non pareggi l' unità, s' ode sempre in aria un terzo suono dalla detta unità dinotato. Che se si finga una corda infinitamente lunga, una porzione finita di questa corda, atta a generare qualsivoglia suono, sarebbe parte aliquota della lunghezza infinita; e quindi la mentovata corda potrebbe in se stessa ricevere qualunque suono. L' esposta riflessione mi dà coraggio di arrischiare una congettura intorno la maravigliosa struttura dell' organo dell' orecchio.

Il dottissimo Signor Jacopo Ermanno ha tentato negli Atti di Lipsia dell' anno 1716. di trovare il tempo periodico di una corda sonora, che si vibra, senza prima indagare la curva, alla quale si adatta la predetta corda oscillando. Non accordandosi colla mia formola quella del Signor Ermanno, mi sono posto ad esaminare la sua soluzione, la quale senza dubbio è per più titoli difettosa. Conciossiachè il commendato Autore abbia sbagliato nel determinare l' azione esercitata dalla elasticità della corda, faccio

faccio vedere che nella mia soluzione tacitamente ne ho computata la vera azione; ed una riflessione aprendo la strada ad un' altra, dimostro, che i punti della corda non si movono per le ordinate della curva da me determinata, ma bensì per segmenti di parabole Apolloniane, i quali e nella grandezza, e nella posizione si adeguano colle predette ordinate. M' inoltro poscia a cercare col metodo delle azioni, fondamento principalissimo della meccanica, la curva, a cui dee conformarsi una corda oscillando, e mi si presenta la stessa curva colla prima soluzione scoperta.

Ella è ammirabile la proprietà delle corde sonore; che la rigidità naturale nulla altera i tempi delle loro minime vibrazioni trasversali. Si spiega chiaramente questo fenomeno col provare, che la diversità della rigidità non cagiona computabile alterazione nelle velocità dei punti analoghi di due corde, che nel solo elemento della rigidità differiscono.

Sebbene abbia supposte infinitesime le vibrazioni delle corde sonore, le verità da me dimostrate si adattano alle minime fisiche oscillazioni, le quali o più ristrette, o più dilatate conservano sempre lo stesso tuono. La conformità della mia soluzione coi fenomeni ci fa toccare con mano, che ai minimi geometrici si possono sempre sostituire i minimi fisici.

Pretendendo i sommi Geometri Leonardo Eulero, Alembert, Luigi de la Grange, ch' oltre le figure da me determinate possa una corda, che si vibra prenderne infinite tutte fra loro diverse, ed al contrario sostenendo il celebre Signor Daniele Bernoulli, che la soluzione del Signor Taylor è sola capace di soddisfare a tutti i casi possibili del problema, di cui si parla, do fine allo Schediasma IV. col mettere in chiaro la ragione, che mi persuade

d' aderire alla sentenza di questo Matematico insigne.

V. L' aria è il corpo che suona negli stromenti da fiato, e la corda d' aria contenuta dentro una canna cilindrica d' organo fa le sue vibrazioni non altrimenti che una corda solida, essendo questa resa elastica da una forza stirante, e quella da una forza premente. Quindi la stessa formola determina i tempi delle oscillazioni tanto delle corde solide, quanto delle fluide: e poichè nelle seconde le forze comprimenti stanno come le loro basi, o come i quadrati dei loro diametri; i tempi delle vibrazioni accettano la proporzione delle lunghezze d' esse corde, purchè a cagione del freddo, o del caldo non si muti la proporzione fra la densità dell' aria, ed il peso che la comprime.

Serve la medesima formola anche per ritrovare il tempo, in cui il suono si diffonde per un dato spazio; e perciò una corda d' aria nel fare una vibrazione, ed il suono nel viaggiare per uno spazio eguale alla lunghezza d' essa corda c' impiegano pari tempo. E conciossiachè il suono cammini alquanto più lento l' inverno, ed alquanto più celere la state; una canna d' organo per conseguenza renderà nella fredda stagione un suono un poco più grave che nella calda. S' inganna il dottissimo Signor Eulero attribuendo tutta agli stromenti da fiato la varietà ascendente ad un tuono, che si osserva nelle contrarie stagioni d' inverno, e di estate, paragonandoli cogli stromenti da corde; imperciocchè da me si dimostra, che questi più di quelli sono soggetti ad alterazione.

Una corda aerea non meno che una solida può generare i suoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. (e tali effettivamente li producono la tromba, ed il corno da caccia) secondochè trema o intera, o divisa in parti aliquote: ed intanto i raggi sonori ci portano i suoni tutti all' orecchio, in-
quan-

quanto che si possono considerare siccome corde d' infinita lunghezza , e qualunque corda finita atta a rendere un determinato suono è parte aliquota d' una corda infinita. Riesce adunque inutile l' ipotesi di M. de Mairan , che si è immaginato l' aria composta di particole di tutti i tuoni , fra le quali ogni suono faccia vibrare le unisone. Colla considerazione dei suoni della tromba deduco all' assurdo questa opinione; non essendo concepibile il perchè non possano oscillare dentro la tromba le particole di tuono medio fra 1 e 2, fra il 2 ed il 3 , fra il 3 ed il 4, &c. Le spiegate leggi regolano altresì le vibrazioni delle corde d' aria contenute nelle canne convergenti , divergenti , e di qualsivoglia diversa figura.

Dalla velocità del suono io deduco il numero di vibrazioni , che fa una corda d' aria in un minuto secondo, e paragonando quello , che risulta dal computo , cogli esperimenti dell' accuratissimo M. Sauveur , dimostro col raziocinio , e colla sperienza , che una corda d' aria dentro una canna cilindrica d' organo , a cagione di replicare riflessioni che succedono, è alquanto più lunga della canna predetta. Quindi ne derivano siccome corollarj le ragioni, per cui il tuono di una canna cresca , o cali allargandone, o ristringendone l' apertura superiore , e discenda all' ottava grave , quando la detta apertura totalmente si chiude. Il sopralodato Signor Eulero stabilisce troppo scarso il numero delle vibrazioni effettuate da una canna d' organo in un minuto secondo; perchè in cambio d' indagare la densità dell' aria pura e sonora , introduce nella formola quella dell' aria mista colle particole eterogenee. Il numero delle oscillazioni da lui determinato discorda soverchiamente dalle osservazioni di M. Sauveur , non potendosi mai presumere , che un uomo così diligente abbia di tanto sbagliato.

VI. Uno ftromento mufico riufcirà perfetto, fe renderà fuoni della fteffa indole, grati, e forti egualmente. Egli è noto quanto gli artefici abbiano pofto di ftudio nella fabbrica degli ftromenti: ed in fatti avendo io cercato le mifure, che debbono affegnarfi alle corde d' uno ftromento, ed alle canne d' organo, acciocchè producano fuoni del pari forti, e aggradevoli; ho fcoperto che la pratica, e la teorica vanno perfettamente d' accordo.

Io non riferirò il lungo giro di raziocinio, col quale dimoftro, che due corde tefe da forze proporzionali alle loro bafi, e fornite nell' ofcillare di eguali forze vive generano fuoni del pari forti: dirò bensì qualche cofa dei limiti, che ftabilifco, affinchè i fuoni egualmente grati fi fentano. La corda grave per tanto paragonata coll' acuta non ha da effere più fottile, nè ofcillando dee muoverfi per uno fpazio più picciolo. Le corde ugualmente groffe formano il primo limite, ed il fecondo è determinato dalle corde, che fi vibrano per uguali fpazj, le quali deggiono avere le groffezze proporzionali alle lunghezze, fe di pari forze vive hanno da fare acquifto nello vibrarfi. In quegli ftromenti, ne' quali affegnandofi a ciafcun fuono la fua corda particolare, c' è un pieno arbitrio, l' arte fta di mezzo fra i due confini eftremi, affegnando alle corde groffezze tali, che ftiano in una ragione mezzana fra quella di egualità, e quella delle lunghezze: e così effettivamente fi pratica nei gravicembali.

Egli è d' uopo ricorrere al primo limite in quegli ftromenti, nei quali la fteffa corda rende più fuoni per opera delle dita della mano finiftra, che in diverfi fiti la premono. In tale circoftanza le corde, che fuonano, egualmente groffe, e varie folo nella lunghezza acquiftano velocità in fiti analoghi, che ftanno in ragione inverfa dimezzata dei tempi delle loro vibrazioni. Ma facendofi in

sì

sì fatti stromenti transito da una corda all' altra, mi sono posto ad indagare qual proporzione debba assegnarsi alle diverse grossezze, acciocchè passando da corda a corda, la mentovata legge delle velocità si conservi, e ritenendo i suoni la stessa indole, l' orecchio non si avveda, che ad una corda anzi che all' alrra appartengano. Le grossezze adunque delle corde hanno da riferirsi nella proporzione dei tempi delle loro vibrazioni, e l' esperienza fatta sopra le corde del violino mi ha reso certo, che la pratica si conforma colla teorica.

Preso ad esaminare un gravicembalo lavorato da Vito de' Trasuntini l' anno 1559, ho trovato, che le grossezze delle corde stanno quasi esattamente di mezzo fra i due stabiliti confini, e che le predette corde acquistano eguali foize vive, mentre che oscillano. In tutti i gravicembali, e le spinette da me osservati, poste al paragone le corde gravi colle acure, le ho rinvenute alquanto più corte di quello richiede la proporzione fra i tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne nasce la conseguenza, che le corde gravi relativamente alle loro grossezze sono un po meno tese delle corde acute. Io rendo ragione di questa costante pratica, e finalmente noro non essere arbitrario l' armare uno stromento con corde di qualunque grossezza, ed armato che sia l' usar forze a capriccio per far suonare esse corde. L' esperienza uniforme alla teorica ha insegnato ai pratici le confacenti grossezze delle corde, e la congrua misura delle forze pressochè uguali delle penne per interamente pareggiare il vigore dei suoni.

Colla scorta delle verità poste in chiaro rispettivamente alle grossezze delle corde dei gravicembali, si determinano agevolmente le misure, che debbono assegnarsi alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli. Quello, che risulta dai miei discorsi si è,

che

che moltiplicando per le lunghezze delle canne le potestà delle lunghezze, in cui si riferiscono le grossezze delle corde dei gravicembali, ne nascono prodotti, ai quali le basi delle canne d' organo hanno da farsi proporzionali. Le grossezze delle corde accettino una ragione esattamente media fra i due limiti sopra statuiti, e si corrispondano nella proporzione delle radici delle lunghezze: si moltiplichi questa per la ragione delle lunghezze, e ne proverrà una terza ragione come le radici dei cubi delle lunghezze, che alle basi delle canne d' organo dovrà dar regola. Conseguentemente i diametri, o le circonferenze di esse canne avranno da stare come le radici quadrato-quadrate dei cubi delle loro lunghezze.

L' organo di questa Cattedrale è un' opera molto perfetta lavorata da Urbano da Venezia l' anno 1420. Misurate diligentissimamente col ajuto del Sig. Liberale Marcuzzi valoroso suonatore d' organo le circonferenze di alcune canne, ho trovato che la pratica conviene esattamente colla teorica.

VII. Negli stromenti naturali, o artificiali da fiato viene determinato il tuono o da quell' ingegno, col quale si genera il suono, che rispettivamente ad alcuni stromenti chiamerò imboccatura, o dalla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro il corpo di essi stromenti. Seconda il tuono una sola di queste cause, se dell' altra è molto più forte: e se ciò non si avvera, egli è d' uopo che le due cagioni si uniscano a produrre lo stesso tuono, onde non s' oda un suono falso, ed ingrato. Spiegato il modo, col quale l' aria concepisce il suono, noto che dall' imboccatura dipende il tuono del fischio, delle pivette dei fagotti, e degli oboè, e di certi registri d' organo con piva, come per esempio dei tromboncini. Se v' ha corda d' aria in questi stromenti, dalla sua lunghez-

za

za non trae l' origine il tuono, ma la canna serve a dar maggior corpo alla voce.

Alla stessa classe apparterrebbe anche la voce dell' uomo, e di altri animali, se conforme la sentenza dell' ingegnoso M. Dodart i tuoni d' essa derivassero dalle varie aperture della glottide. Frattanto il dotto M. Ferrein ha scoperto, e con accuratissimi sperimenti confermato, che le due labbra della glottide più o meno tese debitamente, cagionano della voce i diversi tuoni. Penso, se pure non prendo errore, che i due lodati Scrittori insieme conciliare si possano, riflettendo essere confacente alla maggior perfezione della voce, che l' apertura della glottide, e la tensione delle sue labbra si uniscano nella determinazione del medesimo tuono, calando quella colla dovuta proporzione, mentre questa si aumenta. In sì fatta guisa nulla perdono di stima le belle considerazioni di M. Dodart intorno alle menomissime alterazioni dell' apertura della glottide, che non supera una linea, qualora si passa per minutissimi gradi dal grave all' acuto, o pure non mutando tuono si fa transito con picciolissimi incrementi, o decrementi dal piano al forte, o a rovescio dal forte al piano.

Benchè il tuono delle canne d' organo, del flauto, del flauto traverso, dell' oboè &c. dipenda dalla lunghezza della corda d' aria, che si mette in oscillazione; nulladimeno bisogna talmente regolare l' imboccatura, che il fiato possa concepire un tremito unisono alla corda predetta. In fatti nella tromba secondochè l' imboccatura opportunamente si modifica, suonano o la corda intera, o le sue parti aliquote. Adattata al fagotto la pivetta dell' oboè, in cambio della corda intera o le metà, o le terze parti si vibrerebbero.

Termino lo Schediasma VII. col riferire un' esperienza,

za, la quale ci fa toccar con mano, che negli ftromenti da fiato l' imboccatura, e la corda d' aria determinano il tuono, il quale obbedifce a quello dei due elementi, che ha maggior forza. Se la corda d' aria è affai corta, la varia imboccatura ottiene confiderabili cangiamenti di tuono, i quali vanno divenendo fempre minori, conforme a che la corda d' aria fi allunga. S' ode il fuono falfo, quando coll' imboccatura tento di alterare il tuono di una lunga corda d' aria. In sì fatta circoftanza fi mefcolano infieme due fuoni, uno proprio dell' imboccatura e l' altro della corda mentovata, e da quefta miftione il fuono falfo ha l' origine.

VIII. Lo Schediafma VIII. è da cinque brevi Differtazioni formato, ed ha per argomento la propagazione dei tremiti fonori nell' aria.

1. Suppongo nella prima Differtazione, che il fuono fi propaghi per linee o raggi, che partono dal corpo fonoro quafi da centro, e che tutti i punti aerei contenuti nel medefimo raggio fi vibrino per uguali fpazj. Tre fenomeni, cioè a dire che ofcillando un corpo fonoro, fento in diverfe diftanze lo fteffo fuono in riguardo al grave e all' acuto; che portandomi l' aria all' orecchio più fuoni, che differifcono foltanto nel piano e nel forte, debbono le fue particole neceffariamente vibrarfi colle leggi di un pendolo a cicloide; e che il fuono viaggia equabilmente, mi aprono la ftrada a fpiegare il quarto fenomeno, che al ceffare delle ofcillazioni del corpo fonoro, ceffano altresì le agitazioni nell' aria. Dimoftro, che le particole aeree nell' atto di ridurfi alla quiete ricuperano la loro ordinaria compreffione, e che accoppiandofi in effe la quiete coll' equilibrio, fe quefto non viene rotto da una nuova ofcillazione, o reciprocazione del corpo fonoro, più non fi muovono.

De-

Determino poscia gli spazj scorsi dai varj punti di una linea aerea nell' istante, che il primo punto della stessa viaggiando per un dato spazio ha fatto una mezza vibrazione: e conciossiachè questi spazj sono a grado minori, secondochè le particole distano maggiormente dal principio dell' onda; si comprimono le particole stesse, e dalla differenza delle compressioni di due particole contigue nasce la forza sollecitante all' oscillazione la particola meno compressa, che si tramuta in forza acceleratrice, qualora si divida per la massa della mentovata particola. Essendomi riuscito di trovare le forze acceleratrici proporzionali agli spazj da percorrersi, si scopre possibile nell' aria il moto simile a quello di un pendolo a cicloide, che colla scorta dei fenomeni è stato da me supposto.

Passo a stabilire la velocità, colla quale si propaga il suono, e ne deduco per corollario, che nel tempo d' una vibrazione di una canna d' organo il suono si diffonde ad una distanza eguale alla lunghezza della corda d' aria dalla canna compresa. Ho nominato piuttosto la lunghezza della corda d' aria che la lunghezza della canna; perchè conforme ho avvertito nello Schediasma V. quella è alquanto maggiore di questa. Si raccoglie dalla formola della velocità del suono, che nella stessa stagione o sia esso debole o forte, grave od acuto, camina egualmente veloce. Il caldo minora la densità dell' aria, il freddo l' accresce; e quindi la formola mentovata c' insegna, che la celerità del suono nella state è maggiore che nell' inverno, la qual verità dall' accuratissimo Sig. Lodovico Bianconi è stata confermata colla sperienza.

Se per ridurre a computo la velocità del suono, s' introduce nella formola la densità dell' aria mista colle particole eterogenee, la quale sta a quella del mercurio come 1 : 11826, si scopre, che in un minuto secondo do-

vrebbe il suono viaggiare piedi parigini 912, mentre realmente ne scorre 1038. Ha ottimamente avvertito il Cavalier Nevvton, che le dette particole eterogenee poco elastiche, e meno costipabili non sono atte a concepire le vibrazioni sonore; e quindi preso siccome dato il viaggio del suono manifestatoci dagli esperimenti, col mezzo della nostra formola stabiliremo la densità dell' aria pura e sonora, che nelle medie stagioni si riferisce a quella del mercurio nella proporzione di 1 : 15294.

La proprietà, che una canna d' organo fa una vibrazione nel tempo stesso, in cui il suono si propaga per uno spazio eguale alla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la canna, ci servirebbe di scorta per calcolare la velocità del suono, se potessero supporsi del pari lunghe la corda d' aria e la canna. Ammessa questa supposizione, ed appoggiandoci agli esperimenti di M. Sauveur intorno alle canne d' organo di cinque piedi, troveremo che il suono, il quale di fatto cammina piedi 1038 in un minuto secondo, ne dovrebbe scorrere 1020. Quindi mediante il viaggio reale del suono si stabilisce la proporzione come 1020 : 1038, o sia prossimamente come 57 : 58 fra la lunghezza d' una canna d' organo di cinque piedi, e quella della tortuosa corda d' aria, che dentro la canna stessa va serpeggiando. Conciossiachè il dottissimo Signor Luigi de la Grange nel Tomo primo della Società di Turino condanni il metodo da me seguito, col quale il Cav. Nevvton determina la velocità del suono, prendo dello stesso metodo la difesa, e mostro, che le formole del Signor de la Grange ridotte al giusto conducono alla medesima conseguenza del Nevvton, ch' egli avea giudicato ripugnante alla natura dell' aria.

2. Essendo il Signor Nevvton stato incolpato di petizion di principio la seconda Dissertazione fa manifesta-

3 men-

mente toccar con mano non esser giusta l' accusa; imperciocchè supponendo, che le particole aeree situate nel medesimo raggio si vibrino a guisa di un pendolo a cicloide per ispazj, che vadano scemando, secondochè le particole stesse sono più rimote dal centro sonoro, e valendomi dello stesso metodo come nella prima Dissertazione, trovo che le forze acceleratrici, non sono proporzionali agli spazj da percorrersi, e che per conseguenza l' aria nella mentovata ipotesi non potrebbe (conforme s' era malamente supposto) oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Se il metodo peccasse di petizion di principio, dovrei scoprire anche in tale incontro le forze acceleratrici come gli spazj da scorrersi: ma succedendo il contrario, cade l' accusa, ed il metodo si dimostra incolpabile. Incorrerei nella petizion di principio, se dalla suppoſizione, che le particole aeree oscillino non altrimenti che un pendolo a cicloide, io deducessi che le forze acceleratrici si riferiscono nella ragione degli spazj, che restano da passarsi. Questa non è la strada ch' io batto. Dal moto supposto io raccolgo la costipazione delle particole, e dalla costipazione le forze acceleratrici, le quali trovandosi a dovere soltanto nella ipotesi, che il suono si propaghi per linee o raggi, e che le particole tutte collocate nello stesso raggio si vibrino per eguali spazj, si rende manifesta l' aggiustatezza del metodo.

3. Esamino nella terza Dissertazione, se l' aria possa vibrarsi colla legge dei pendoli a cicloide nella supposizione, che il suono per settori sferici si propaghi: e presentandomisi forze acceleratrici, che non abbracciano la proporzione degli spazj da percorrersi, dimostro non essere possibile, che il suono si diffonda in tal guisa. Ponendo anche qui in opera il metodo delle due prime dissertazioni, sempre più si conferma, ch' esso va esente dalla nota di petizion di principio.

 4. L'

4. L' acutiſſimo Sig. Leonardo Eulero nella diſſertazione ſopra la natura del fuoco ſtabiliſce la velocità del ſuono con una formola differente dalla Nevvtoniana da me parimente abbracciata. Dandoci eſſa formola la velocità del ſuono maggiore del giuſto, anche quando s' introduce nel calcolo la denſità dell' aria miſta colle particole eterogenee; molto peggio ſuccederebbe, ſe ſi metteſſe a computo la denſità dell' aria pura, la quale unicamente è capace di ricevere, e di comunicare le vibrazioni ſonore. Ora quantunque queſta ſola rifleſſione diſcopra la falſità della formola del commendato Scrittore; ho dedotta da eſſa la curva, che relativamente alle diſtanze dal primo punto di una corda aerea determina gli ſpazj ſcorſi dai punti della corda ſteſſa nell' iſtante, che il primo punto ha una mezza vibrazione compiuto: e mettendoci la mentovata curva ſotto gli occhi un fiſico aſſurdo, ho fatto toccar con mano, che la formola del Sig. Eulero non ſi accorda colla verità. Ed in fatti ſecondochè le particole aeree ſi diſcoſtano dal principio del raggio ſonoro, i detti ſpazj vanno ſcemando, in un dato punto lo ſpazio è nullo, diventano poſcia gli ſpazj negativi, e finalmente lo ſpazio torna ad uguagliarſi al nulla in un altro punto. Nella mezza vibrazione del primo punto del raggio ſcopro la ragione, per cui tutti i punti fino al primo punto di quiete s' abbiano da movere per la medeſima direzione. Ma paſſato il punto immobile, non giungo ad intendere, qualmente i punti ſituati fra i due punti di quiete poſſano oſcillare per la direzione contraria.

5. Partecipati queſti miei penſamenti al dottiſſimo P. D. Paolo Friſi, mi propoſe di rintracciare, ſe ſi poteſſe ſalvare la formola del Sig. Eulero, ſupponendo che tutte le particole d' aria componenti l' onda, benchè nello ſteſſo tempo compiano il movimento, non lo principjno però nell'

nell' istante medesimo; di modo che da una all' altra successivamente il tremito si comunichi. Accettata questa supposizione siccome vera, le particole aeree impiegherebbero nell' oscillare un tempo tanto più picciolo, quanto fossero più prossime all' ultimo punto dell' onda. Perciò ogni particola produrrebbe un suono diverso, il quale si sentirebbe vie più acuto conforme a che l' orecchio si avvicinasse al fine dell' onda: ma in qualsivoglia sito s' ode lo stesso suono unisono a quello del corpo sonoro; dunque le vibrazioni dell' onde aeree non si conformano all' ipotesi proposta da esaminare.

A questa palpabile osservazione aggiungo la costruzione della curva determinante gli spazj scorsi dalle particole aeree contenute nell' onda stessa, quando nel medesimo istante hanno compiuta una oscillazione, e mi si presentano dei fisici assurdi maggiori di quello nella quarta Dissertazione considerato.

Oltre a ciò essendo innegabile, che le particole aeree ricevono dal corpo sonoro la forza viva acquistata nell' oscillare; dimostro la ripugnante conseguenza, che la forza viva delle menrovate particole supererebbe quella del corpo sonoro, di modo che l' effetto eccederebbe la propria cagione.

Conchiudo finalmente col provare, che il moto non potrebbe far transito da un onda all' altra, ma nella sola onda prima sarebbe obbligato a fermarsi, e dall' aggregato dei notati inconvenienti ne inferisco doversi cancellare l' ipotesi, di cui si parla, dal libro della Natura.

Era gia terminata la stampa dello Schediasma IV., quando mi fù richiesta una distinta dichiarazione, qualmente dalle figure, e dai moti appartenenti ad una corda, che rende un suono solo, si compongano le figure, che prende, ed i movimenti, che concepisce, ogni qual volta

col

col ſuono principale della corda intera ſono miſti quelli delle ſue parti aliquote. Accintomi all' impreſa, ho moſtrata la coſtruzione delle predette figure, ed ho fatto vedere, ch' i punti della corda ſono ſpinti dalle forze acceleratrici neceſſarie, acciocchè ne ſegua la data meſcolanza de' ſuoni. L' internarmi in queſti penſamenti ha prodotto altresì il non diſpregevole frutto, che mi rieſca di mettere nel ſuo vero lume la ſpiegazione fiſica del terzo ſuono, che mediante due ſuoni forti e continuati, ſi produce nell' aria ſecondo l' oſſervazione del ſopralodato Sig. Giuſeppe Tartini.

INDICE

INDICE

DEGLI SCHEDIASMI.

Dis-

SCHE-

SCHEDIASMA I.

Della proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze che le producono.

I. MAneggiando questo stesso argomento il Conte Jacopo Riccati mio Padre in una sua dissertazione pubblicata nel Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna, e poscia ristampata ne Tomo III. delle sue Opere, suppone che leggi simili diano norma e alle consuete vibrazioni delle corde, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente a vicenda ascende o discende. La prima supposizione ne chiama due altre, cioè che le corde sieno prive di naturale rigidità, e che il peso stirante sia minimo in relazione alle masse delle corde; ammesse le quali circostanze, osserveremo in progresso, che da canoni analoghi vengono regolati i due descritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nelle corde distinguersi: l' una, che chiamo naturale, consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi allungare, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente; l' altra, che chiamo artificiale, s' eguaglia all' accrescimento di ripugnanza per essere ulteriormente distesa, che dalla forza, o peso tendente nella corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla struttura della corda, e dall' intralciamento delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante. Conciossiachè ella è considerazione anzi geometrica che fisica l' assumere corde solide prive di naturale rigidità, stimo opportuno, accostandomi più alla Natura, di mettere a computo il detto elemento nella so-

luzione del seguente problema, e di supporre altresì finita la proporzione fra le masse delle corde, ed i pesi tendenti.

Trovare la proporzione fra gli allungamenti delle corde, ed i pesi o forze, che li producono.

II. Prima di tutto egli è necessario di porre in chiaro, quali sieno quelle forze o pesi, che producono gli allungamenti nelle corde. Sia la corda A B (*Fig.* 1.) tesa dal peso P, con cui stia in equilibrio; egli è certo, che per allungarla sarà d' uopo aggiungere al peso P un nuovo peso per esempio p. Si ponga in B un impedimento N O, il quale non permetta, che il punto B della funicella A B possa muoversi da B verso A, e levato poscia il peso P, la corda A B eserciterà contro l' impedimento N O quello stesso sforzo, ch' esercitava contro del peso P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peso o minore, o eguale a P, non cagionerà questo veruna distensione, impiegandosi tutta la sua energia o a minorare, o togliere interamente di mezzo il contrasto dell' impedimento N O colla corda A B, il quale tornato ad appendere alla stessa il peso P, non sostiene più veruna fatica. Chi vorrà dunque allungare la corda A B, dovrà applicarle un peso $P+p$ maggiore di P, ed il peso p aggiunto al dato P sarà quello, che produrrà in essa la distensione.

III. Dilucidato un tal punto a solo fine di evitare gli sbagli, avanciamoci a ricercare l' allungamento innassegnabile dl operato nella corda qualunque A B, la cui lunghezza $L+l$, dalla forza minima dp aggiunta alla forza o peso finito $P+p$ stirante la corda stessa. Avvertasi che per L s' intende la lunghezza della corda corrispondente al peso conosciuto P, e per l la distensione cagionata dal peso variabile p. Più elementi possono influire nel mentovato allungamento, la forza dp, la lunghezza della corda A B $=L+l$, il peso tendente $P+p$, la rigidità naturale r della corda, la grossezza della corda.

CANONE I.

Essendo tutti gli altri elementi pari, la distensione dl è come la forza minima dp, che la genera.

Qualunque sia la curva b D F (*Fig.* 2.), che determina la relazione fra le distensioni b c, b C della corda A b, e le forze

ze cd, CD, che le producono; una sua minima porzione BD si confonde colla linea retta. Posto adunque che le forze cd, CD sieno minime, avremo bc : cd :: bC : CD; e perciò la distensione dl è come la forza minima dp, che la genera.

CANONE II.

Essendo gli altri elementi dati, la distensione dl è come la lunghezza $L + l$ della corda.

La citata dissertazione di mio Padre mi somministra la dimostrazione di questo secondo canone. Pendano da due chiodi A, a (*Fig.* 3.) le due corde AB, ab differenti solo nella lunghezza. Prendasi nella corda AB la parte minima AL, a cui nel punto L si applichi il peso dato P, che stirando la fibra AL, produca la distensione LM. Nell' altra corda ab parimente si pigli la parte al = AL, e adattato lo stesso peso in l, segna la distensione lm = LM. Il punto m si renda immobile con un chiodo, di modo che la fibra am non possa accorciarsi. Presa nuovamente nella medesima corda la porzione mn = AL, agisca il peso P nella fibra mn, ed effettuata la seconda distensione no = LM, il punto o come prima si fermi con un altro chiodo. Ripetuta in sì fatta guisa l'operazione, dall' ultima fibra, che si stabilisca essere op, liberamente penda lo stesso grave P, e sia pq = LM l' ultimo allungamento.

Conciossiachè le due fibre ugualmente stirate am, mo tentino di restituirsi alla consueta lunghezza, e sieno impedite dai due chiodi a, ed o; egli è manifesto che il chiodo frapposto m è tirato all' insù, e all' ingiù da forze uguali costituenti fra loro equilibrio. Similmente le due fibre mo, oq sono in equilibrio rispettivamente al chiodo o; imperciocchè la prima contro i chiodi m, o, e la seconda contro il chiodo o, ed il grave sospeso al punto q esercitano la medesima forza, ma per contrarie direzioni. Per la qual cosa levati i chiodi intermedj m, ed o, non si distrugge l' equilibrio, e rimanendo il tutto nello stesso stato, il grave P non ascenderà, nè discenderà; e quindi ne segue, che tante saranno le distensioni eguali, quante le fibre, e che l' allungamento di tutta la corda ab, ch'equivale a tutti gli allungamenti delle sue parti, all' allungamento

di una fibra A L, o di tutte le fibre componenti la corda A B si riferirà come lunghezza a lunghezza. Il medesimo discorso si adatta anche al caso, che le corde A B, a b differenti soltanto nella lunghezza stiano in equilibrio col peso $P+p$, a cui si aggiunga il peso infinitesima dp, il quale cagionerà distensioni proporzionali alle lunghezze, onde sia sempre dl come $L+l$.

CANONE III.

Posti costanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la distensione dl è inversamente come il peso $P+p$ tendente la corda.

Supponendosi nulla la rigidità naturale della corda, la forza $P+p$ s' eguaglia alla rigidità artificiale di essa corda, con cui sta in equilibrio. Un peso adunque minimo proporzionale a $P+p$ produce un allungamento costante, e per conseguenza, fatto uso del primo canone, un peso costante dp genera un allungamento in ragione inversa dal peso tendente $P+p$.

CANONE IV.

Posti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peso tendente la corda, l' allungamento dl sta in ragione reciproca della rigidità naturale r della corda.

La dimostrazione di questo canone è affatto simile a quella del canone precedente.

CANONE V.

Se due corde non differiscono in altro che nella rigidità, e nel peso tendente, la distensione dl cagionata dalla stessa forza minima dp è in ragione inversa della somma $r+P+p$ della rigidità e del peso tendente, cioè a dire d l come $\frac{1}{r+P+p}$.

Ho detto della somma, e non del prodotto, perchè se fosse dl come $\frac{1}{r.\overline{P+p}}$, s' incontrerebbe nell' assurdo, che supponendo

egua-

eguale a nulla il peso tendente $P+p$, la distensione dl si scoprirebbe infinita.

Questo canone non è che una conseguenza dei canoni terzo e quarto insieme combinati.

CANONE VI.

Se gli altri elementi tutti saranno costanti, nulla la naturale rigidità di due corde, ed ineguali solamente le basi, un pari allungamento dl verrà prodotto dalla forza minima data dp.

Si considerino le due corde come fasci disuguali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle di un fascio al numero delle funicelle dell' altro fascio starà come la base di una corda a quella dell' altra. Tanto nel fascio picciolo, quanto nel grande si concepiscano e il peso tendente $P+p$, e la forza minima dp divisi in tanto numero di parti eguali, quante sono le funicelle componenti un fascio, e si scoprirà, che a due funicelle appartenenti a diversi fasci toccano e pesi tendenti, e forze minime, che si corrispondono in ragione inversa delle basi delle corde. Essendo dunque nelle dette funicelle le forze minime come i pesi tendenti, combinati i canoni primo e terzo, si troverà costante la distensione dl in ambe le funicelle. Quello, che si è detto d' una funicella, si può applicare a tutte l' altre componenti la stessa corda, ed indi cavare la conseguenza, che sono eguali le distensioni di due corde, la cui rigidità naturale sia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, eccetto le basi, sieno comuni. Questo sesto canone si conforma col terzo, il quale considerate due corde, in cui l' unico elemento variabile sia il peso tendente $P+p$, e la rigidità naturale uguale a nulla, stabilisce la distensione dl in ragione inversa del peso tendente, o sia come $\frac{1}{P+p}$. Supposto costante $P+p$, si trova parimente costante l' allungamento dl come vuole il sesto canone: e quindi i canoni terzo e sesto si uniscono in un solo, nè trattandosi di corde, la cui rigidità naturale sia nulla, importa in riguardo alle distensioni considerare l' elemento della varia grossezza.

CA-

CANONE VII.

Essendo costanti tutti gli altri elementi, e nullo il peso tendente, le distensioni di due corde differenti di grossezza serberanno la ragione inversa delle narurali rigidità, e si verificherà essere dl come $\frac{1}{r}$.

Avvertasi, che il quarto, ed il settimo canone sono una cosa stessa. Amendue suppongono nullo il peso tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grossezza costante, e questo variabile. Se due corde differentemente grosse saranno della stessa materia, si ritroveranno le rigidità come le basi, o grossezze, cioè r come g, e mediante la stessa forza minima dp ne risulteranno allungamenti in ragione inversa delle grossezze, ch' è quanto dire dl come $\frac{1}{g}$. Paragonate insieme due corde di grossezza, e di materia differente, e posto che la specie b esprima la rigidità variabile di corde dello stesso diametro, ne risulta la totale rigidità r come bg, e dl come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{bg}$.

La Dimostrazione del presente canone riesce semplicissima. Se fosse dp come r, l' allungamento dl si scoprirebbe costante; dunque supponendosi dp costante, il detto allungamento per il primo canone è come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{bg}$.

Non si trascuri il corollario, che rispettivamente a corde fornite di finita naturale rigidità, l' elemento della varia grossezza serve a determinare la misura d' essa rigidità.

CANONE VIII.

Se gli unici elementi variabili sieno la grossezza, e la rigidità, si avrà dl come $\frac{1}{P+p+r}$, vale a dire le minime distensioni inversamente come l' aggregato del peso stirante $P+p$, e della rigidità r.

Questo canone altro non è, che un caso particolare del canone

none quinto, supponendosi in quello variabile il peso $P+p$, che qui si assume costante.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole dl come dp; il secondo, che vuole dl come $L+l$; il quinto, che vuole dl come $\frac{1}{r+P+p}$. Gli altri tutti si confermano col quinto, usato al più l' artifizio di supporre o la rigidità, o il peso tendente uguale a nulla. Combinati per tanto insieme i tre diversi canoni, si trova essere dl come $\frac{\overline{L+l}.\,dp}{r+P+p}$, o sia $b\,dl=\frac{\overline{L+l}.\,dp}{r+P+p}$, ch' è quanto dire le minime distensioni in ragione composta, diretta delle lunghezze delle corde, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa della somma della rigidità naturale delle corde, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare, che nella stessa corda la rigidità r non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti p cresce la lunghezza $L+l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata dunque b la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza L, ed al peso stirante P, avremo generalmente $r=\frac{bL}{L+l}$. La quantità $\frac{L}{L+l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la quale moltiplicata per la lunghezza variabile $L+l$ mi dà il prodotto costante L, indice della massa, che nella corda più o meno allungata resta sempre la stessa. L' espressione $r=\frac{bL}{L+l}$ si adatta anche a corde diverse, purchè per b s' intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza L, ed al peso tendente P amendue dati. Per computare la specie b, bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, ond' è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso P. Le basi si trovano esattamente col pesare le corde, e coll' avvertire, ch' esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per le lunghezze, e per le densità.

Sostituito nella formola sopra trovata in cambio di r il suo valore $\frac{bL}{L+l}$, ei si presenterà l' equazione differenziale

$bdl = \dfrac{\overline{L+l}\,.\,dp}{\dfrac{bL}{L+l}+P+p}$, che generalmente esprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze o pesi, che li producono.

VI. Si metterà in maggior lume la verità della nostra formola, coll' avvertire dedursi da essa il noto canone, che se a due corde della stessa materia, pari in lunghezza, differenti di base, e tese da pesi proporzionali alle basi, si applicheranno pesi minimi parimente proporzionali alle basi, genereranno questi distensioni minime uguali.

Sia L la lunghezza della corda corrispondente al peso tendente P, ed aggiunto il peso minimo dp, si avrà l' espressione $bdl = \dfrac{Ldp}{b+p}$. Per le cose dette nel canone settimo, la rigidità b di corde della stessa materia, ma di base differente è proporzionale alla base: ma anche il peso P si vuole proporzionale alla base; dunque la somma $b+P$ sta come la base, e supponendo altresì come la base il peso aggiunto dp, e costante la lunghezza L; ne segue che relativamente alle corde, di cui parliamo, si troverà costante il prodotto $\dfrac{Ldp}{b+P}$, e conseguentemente l' allungamento minimo dl proporzionale ad esso prodotto.

Egli è da notarsi per altro, che non tutte le materie, che collo stesso nome si chiamano, sono del pari rigide. Tutti gli ottoni per esempio non saranno dotati della stessa rigidità: ed oltre a ciò rendendosi una corda vie più sottile col seguitare a passar per trafila, la quale sempre più la costipa; paragonate insieme due corde della medesima materia, una sottile, e l'altra grossa, si troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la ragione della base, ciò ch' è stato da me confermato colla esperienza. Nell' addotta dimostrazione si prescinde da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formola $bdl = \dfrac{Ldp}{b+P}$ si troverà il tempo, in cui una corda A B (*Fig.* 2.) si vibra per lungo. Si tolga al peso tendente P una minima porzione f, acciocchè rotto

to l' equilibrio la corda si metta in oscillazione. E qui mi dichiaro di supporre, che nello stesso istante si comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più rimote dal peso P; il che si verificherà almeno fisicamente, trattandosi di corde, la cui lunghezza sia moderata. Sia $BF = f$ la forza minima iniziale, che sollecita al moto il punto estremo B della corda A B, e Bb sia lo spazio, in fine del quale la forza sollecitante e nulla. Eguagliandosi il detto spazio alla somma degli accorciamenti delle fibre tutte, ond' è formata la corda A B, egli e facile da capire, che l' aja triangolare bBF pareggia l' intera azione delle forze sollecitanti. Ora a quest' azione s' eguaglia l' aggregato delle forze vive acquistate, e dal peso stirante P, e da tutte le meñome particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale, mi servo del seguente artifizio.

La lunghezza A B (*Fig.* 4.) della corda raprefenti la sua massa m, ed instituita l' analogia $m : P :: AB : BH$, una tal linea dinoterà la massa del peso P tendente la corda. Le due linee bD, bG normali, e tra loro, e coll' Ab si eguaglino alla velocità massima u del punto B nel sito b, e del peso tendente P, onde sia $DG = u^2$, ed agevolmente si scoprirà, che la forza viva del peso P giunto in b e proporzionale al parallelepipedo $BK = Pu^2$. In riguardo alla forza viva acquistata dalla corda A B, si compia la piramide A B E, e fatta la riflessione che le velocità massime di due particole bB, cC stanno tra loro come gli spazj trascorsi nello stesso tempicello, i quali serbano la ragione delle distanze A B, A C dal punto fisso A; deducasi, che se bG esprime la massima velocità della particola bB, la linea cI dinoterà la velocità massima della particola cC, ed il quadrato NI il quadrato d' essa velocità. Quindi i due solidi be, cO espongono le forze vive delle due fibre bB, cC: ma da tutti i solidi be, cO &c. dinotanti le forze vive delle corrispondenti particelle viene formata la piramide $ABE = \frac{mu^2}{3}$; dunque la stessa è proporzionale alla somma delle forze vive di tutte le fibre componenti la corda A B.

VIII. Ciò dimostrato, riflettasi, che se si dasse una corda matematica A B (*Fig.* 1) sollecitata dalla scala di forze b B F, tesa dallo stesso peso P, ed in questo solo differente dalla corda fisica A B, che la sua massa $\frac{m}{3}$ fosse tutta unita nel punto B, acquisterebbe essa la medesima forza viva. Essendo perciò nell' uno, e nell' altro caso il punto estremo B delle due corde fisica, e matematica dotato in siti analoghi della stessa velocità, e scorrendosi lo stesso spazio B b, egli è manifesto, che la corda matematica sarebbe isocrona alla fisica. Trovato per tanto il numero di vibrazioni, che farebbe la corda matematica in un minuto secondo, si caverà la conseguenza, che un pari numero di oscillazioni fa nello stesso tempo la corda fisica.

IX. Rivolgendomi alla corda matematica A B, la cui massa eguale alla terza parte di quella, ond' è fornita la corda fisica di pari lunghezza L, stia tutta concentrata nel punto B, suppongo, che il detto punto seguitato dal peso P sia giunto nel sito C, e che indi muova un menomissimo passo C c. Si tiri l' ordinata C D $= p$, e denominata b C $= l$, sarà la infinitesima C c $= -dl$, e per le note formule si avrà $-p\,dl = \overline{\frac{m}{3} + P}\,.\,u\,du$: ma conforme si è sopra determinato $b\,dl = \frac{L\,dp}{b+P}$; dunque fatta la sostitutione, $\frac{L}{b\,.\,\overline{b+P}}\,.\,-p\,dp = \overline{\frac{m}{3} + P}\,.\,u\,du$, ed integrando, $f^2 - p^2 = \frac{b\,.\,\overline{b+P}\,.\,\overline{\frac{1}{3}m + P}\;u^2}{L}$. Si aggiunge la costante f^2; perchè nel principio del moto, quando la velocità $u = o$, la forza sollecitante si eguaglia ad f peso minimo detratto dal finito P. Fatta l' estrazione della radice, troveremo $\sqrt{f^2 - p^2} = \frac{\sqrt{b\,.\,\overline{b+P}\,.\,\overline{\frac{1}{3}m + P}}}{\sqrt{L}}\,.\,u$: ma

$u =$

$u = \frac{-dl}{dt}$, e $dl = \frac{Ldp}{b.\overline{b+p}}$; dunque $u = \frac{-Ldp}{b.\overline{b+p}.dt}$, e per conseguenza eseguita la sostituzione, dopo le debite operazioni, $dt = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}\overline{m+p}}}{\sqrt{b.\overline{m+p}}} . \frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$. L' integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$, quando il punto B, compiuta una semivibrazione, sia giunto in b, si eguaglia al quadrante diviso pel raggio, e sia prossimamente alla frazione $\frac{355}{226}$; e perciò integrando;

$$t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}\overline{m+p}}}{\sqrt{b.\overline{b+p}}} . \frac{355}{226},$$

ed il tempo d' una intera vibrazione del punto B, o sia della corda AB,

$$t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}\overline{m+p}}}{\sqrt{b.\overline{b+p}}} . \frac{355}{113}.$$

E giacchè scopriremo in progresso essere $b = 1$, $t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}\overline{m+p}}}{\sqrt{\overline{b+p}}} . \frac{355}{113}$.

X. Si troverà il valore del tempo t espresso per esempio in secondi, paragonando la corda AB con un pendolo a cicloide, il tempo d' una vibrazione del quale generalmente si espone per la frazione $\frac{355}{113}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi fa una vibrazione per secondo; dunque instituita l' analogia

$t : \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P}} . \frac{355}{113} :: 1 : \sqrt{36\frac{17}{24}} . \frac{355}{113}$, scopriremo $t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P.36\frac{17}{24}}}$, valore del tempo d' una vibrazione per lungo della corda matematica isocrona alla fisica A B espresso in secondi.

XI. Egli è noto, che oscillando per traverso la corda A B appoggiata a due scannelli, e tesa da una forza equivalente al peso P, e chiamato T il tempo d' una sua vibrazione, preso un secondo per unità, si ha l'equazione $T = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}} . \frac{113}{355}$.

Osservi chi legge, quanto sieno differenti i tempi t, T di due oscillazioni della stessa corda, una per lungo, e l'altra per traverso, rispondendosi essi nella proporzione di

$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{P}} . \frac{113}{355}$, la quale non può essere di egualità, se non nel caso particolare, che sia la rigidità $b =$

$\frac{\frac{1}{3}mP+P^2}{m} . \frac{\overline{355}^2}{\overline{113}^2} - P$. Nella corda, che si vibra per lungo, si pongono in moto la massa della corda, ed il peso tendente: nella corda, che oscilla di traverso, la sola massa posta in moto si è quella della corda. Trattandosi delle oscillazioni per lungo, va messa in computo la rigidità naturale b della corda, la quale niente altera le vibrazioni trasversali della corda medesima.

XII. Fra le molte ipotesi, che potrebbero considerarsi, mi ristrin-

riſtringerò alle due ſole, a cui ci guida la prima ſuppoſizione del Conte Jacopo mio Padre, che leggi ſimili diano norma e alle conſuete vibrazioni delle corde, che oſcillano di traverſo a due ſcannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oſcillano per lungo, mentre il peſo tendente alternatamente aſcende, o diſcende. Richiedono le due mentovate ipoteſi, che le corde ſieno prive di naturale rigidità, onde ſi eguagli a nulla la ſpecie b, e che il peſo ſtirante P ſia minimo riſpettivamente alla maſſa m della corda. Modificata la formola del tempo d' una vibrazione per lungo a norma di queſte ſuppoſizioni, prende il ſeguente aſpetto $t = \frac{\sqrt{L . \frac{1}{3} m}}{\sqrt{P}} . \frac{355}{113}$. Fatta la diviſione per la quantità coſtante $\frac{355}{113} . \sqrt{\frac{1}{3}}$, ſi trova t come $\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P}}$, legge ſimile a quella, che regola le oſcillazioni traſverſali delle corde.

XIII. Torno a prender per mano l' equazione differenziale del numero V. cioè $b\,dl = \frac{\overline{L+l} . dp}{\frac{bL}{L+l} + P + p}$, da cui generalmente ſi eſprima la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o peſi, che li producono. Moltiplico per $\frac{bL}{L+l} + P + p$, e traſportato un termine da una parte all' altra mutato il ſegno, trovo $\frac{bbL\,dl}{L+l} = \overline{L+l} . dp - \overline{P-p} . b\,dl$. Divido tutti i termini per $\overline{L+l}^{\,b+1}$, ed ho $\frac{bbL\,dl}{\overline{L+l}^{\,b+2}} = \frac{\overline{L+l} . dp - \overline{P-p} . b\,dl}{\overline{L+l}^{\,b+1}}$, ed integrando, non ommeſſa l' aggiunta della coſtante, $c - \frac{bbL}{\overline{b+1} . \overline{L+l}^{\,b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$.

Si

Si determina il valore della coſtante c, ponendo il peſo aggiunto $p = o$, nel qual caſo è parimente $l = o$, onde abbiaſi $c = \frac{b\,b}{\overline{b+1}\,.\,L^{b}} + \frac{P}{L^{b}}$. Si ſoſtituiſca un tale valore, e ſi troverà $\frac{b\,b}{\overline{b+1}\,.\,L^{b}} + \frac{P}{L^{b}} - \frac{b\,b\,L}{\overline{b+1}\,.\,\overline{L+l}^{\,b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$, o ſia moltiplicando per $\overline{L+l}^{\,b}$, $\frac{b\,b}{b+1} + P.\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} - \frac{b\,b}{b+1}.\frac{B}{L+l} = P + p$, equazione finita eſperimenta la relazione fra le diſtenſioni l, ed i peſi o forze p, dai quali vengono cagionate.

XIV. Ho promeſſo di provare eſſere il coefficiente $b = 1$. Otterremo ciò conſiderando le compreſſioni dell' aria, la quale, conforme metterò in pieno lume nello Schediaſma II. ha la proprietà, che le ſue denſità ſono proporzionali ai peſi comprimenti. Oſſervo nell' ultima premeſſa formola, che poſta la rigidità $b = o$, ne riſulta $P.\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} = P + p$, eſpreſſione da cui ſi deduce, che al peſo tendente $P + p = o$ corriſponderebbe la lunghezza $L + l = o$ della corda, che non foſſe dotata di veruna naturale rigidità.

Paſſando dalle corde, che ſi rendono elaſtiche per mezzo dello ſtiramento, a quelle, che divengono elaſtiche per mezzo della compreſſione, ſi cavi la conſeguenza, che levato qualſiſia peſo comprimente ad una corda, o elaſtro, la cui rigidità naturale ſia nulla, ſi dilaterà eſſo infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell' aria, la quale, minorandoſi ſempre più il peſo comprimente, è capace di una indefinita rarefazione. Riſpettivamente adunque all' aria la ſpezie b s' eguaglia a nulla almeno ſiſicamente.

Ci ſia un tubo cilindrico AF (*Fig.* 5) ripieno d' aria compreſſa dal peſo P, e ſia la lunghezza AB d' eſſo tubo ugnale ad L. Al peſo P aggiungaſi il peſo p, che generi la compreſſione AC $= l$, onde la noſtra corda ſi ſcorti, e ſi riduca alla lunghez-

za BC $= L - l$. Il peſo comprimente $P + p$ accreſcaſi di nuovo per una fluſſione infiniteſima dp, a cui corriſponda la minima compreſſione $Cc = dl$, e fatto uſo degli ſteſſi canoni come nelle corde ſolide, che ſi ſtirano, col ſolo divario che ſia $b = o$, ſcopriremo $bdl = \frac{\overline{L-l}.dp}{P+p}$, equatione differentiale dinotante la relazione fra le compreſſioni dell'aria, ed i peſi che le producono.

Divido ambo i membri della equazione per $L - l$, ed ho $\frac{bdl}{L-l} = \frac{dp}{P+p}$, o pure $o = \frac{dp}{P+p} - \frac{bdl}{L-l}$, ed integrando, preſi i logaritmi nella logiſtica della ſotto tangente 1, log. c $=$ log. $\overline{P+p} + b$. log. $\overline{L-l}$, e paſſando dai logaritmi alle quantità ordinarie, $c = \overline{P+p} . \overline{L-l}^{\,b}$.

Si ſtabiliſce il valore della coſtanre c, ponendo $p = o$, nel qual incontro e parimente $l = o$, e per conſeguenza $c = P.L^{b}$. Adempiuta la ſoſtituzione nell' ultima ſovrappoſta formola, troveremo $P.L^{b} = \overline{P+p} . \overline{L+l}^{\,b}$.

Ora eſſendo, conforme vuol l' eſperienza, le denſità d, D dell' aria come i peſi comprimenti P, $P+p$, e deducendoſi dalla ritrovata equazione l' analogia $P : P+p :: \frac{1}{L^{b}} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$, avremo $d : D :: \frac{1}{L^{b}} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$. Ma le denſità, che generalmente ſerbano la ragione compoſta, diretta dalle maſſe, ed inverſa dei volumi, nel noſtro caſo, in cui la maſſa è ſempre coſtante, ſono inverſamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri FB, FC, che hanno comune la baſe, ſono come le lunghezze BA $= L$, BC $= L - l$; dunque $d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$. E perchè abbiamo altresì ſcoperto eſſere $d : D :: \frac{1}{L^{b}} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$, avremo $\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$

::

:: $\frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$, e perciò $\overline{L-l}^{\,b-1} = L^{b-1}$, il che non può mai verificarsi, se non posto $b = 1$.

Se $b = 1$ nelle compressioni, deve avere lo stesso valore anche negli stiramenti, servendo all' uno, ed agli altri la stessa formola differenziale $b\,dl = \frac{\overline{L \mp l}\,.\,dp}{\frac{bL}{L \mp l} + P + p}$, ed essendo la Natura costante nelle sue leggi. Ciò, come vedremo, viene esattissimamente confermato dalla esperienza.

XV. La formola dunque del numero XIII. cioè

$$\overline{\frac{bb}{b+1} + P}\,.\,\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^b} - \frac{bb}{b+1}\,.\,\frac{L}{L+l} = P + p,$$

sostituita in cambio di b l' unità, ci si presenta sotto la forma seguente

$$\frac{1}{2}\,\overline{b+P}\,.\,\frac{L+l}{L} - \frac{1}{2}\,b\,.\,\frac{L}{L+l} = P + p.$$

Nel asse A B (*Fig. 6.*) segno $AB = L$, ed indi a squadra conduco AK, e $BF = P + \frac{1}{2}b$. Congiunti con una linea, che si proroghi indefinitamente, i punti A, F, si tagli $BH = P$, onde resti $HF = \frac{1}{2}\,b$, e fra gli assintoti AK, AF descrivasi l' iperbola Apolloniana i C H I, la quale passi pel punto H; dico che posta l'assissa $AD = L + l$, sarà l'ordinata $DI = P + p$, peso tendente atto a ridurre la corda alla lunghezza AD.

Per la natura dell' iperbola i C H I abbiamo $\frac{FH.\,AF}{AG} = GI$: ma stante la similitudine dei triangoli A B F, A D G, $\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AD}$; dunque $\frac{FH.\,AB}{AD} = GI$, e sia analiticamente $\frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = GI$, linea esprimente la metà della rigidità naturale della corda, mentre

tre il peso tendente l' ha ridotta alla lunghezza $AD = L+l$. Ad AD infinita corrisponderebbe GI infinitesima, e minima conseguentemente sarebbe in tal incontro la rigidità naturale della corda divenuta infinitamente sottile. I mentovati triangoli ABF, ADG mi suggeriscono l' analogia

$$AB : BF :: AD : DG$$

$$L : P + \frac{1}{2}b :: L+l : \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L}$$, da cui si deduce il valore di DG. Essendo per tanto $DG = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L}$, e $GI = \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$, ne risulta $DI = DG - GI = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$. Ma per la nostra equazione $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = P+p$; dunque presa $AD = L+l$, sarà la corrispondente ordinata $DI = P+p$.

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta pel punto H la linea mHM parallela ad AD, si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione BD.

Nel punto C, in cui si tagliano la linea AD, e l'iperbola iCHI, il peso tendente s' eguaglia a nulla, e per conseguenza AC si è la lunghezza naturale della corda non istirata da peso alcuno. Il doppio della linea CE dinota la rigidità naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Per ritrovare il valore di $AC = L+l$, si ponga nella nostra formola $P+p=0$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza naturale della corda $AC = L+l = L.\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$. In questa circostanza $l = BC$ è quantità negativa $= L.\sqrt{\frac{b}{b+2P}} - L$, la

la quale ci manifesta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione BC. La linea CB adunque uguale ad $L - L\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$ misura l' allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $CE = \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$, surrogando in vece di $L+l$ la rinvenuta pari grandezza $L\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$, onde abbiasi, adempiuti i calcoli necessarj, $CE = \frac{\sqrt{b^2+2bP}}{2}$, e conseguentemente $2CE = \sqrt{b^2+2bP}$, rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno.

Posta la lunghezza AD infinita, sarà parimente infinito il peso tendente DI uguale adequatamente a DG ordinata al triangolo ADG; giacchè in tale ipotesi è infinitamente picciola l' ordinata GI all' iperbola. Per allungare adunque immensamente una corda, non ci vuol meno di un peso infinito. In fatto per altro questo allungamento indefinito non segue. La tenacità, che connette l' una coll' altra le particole componenti la corda, è finita; e quindi accresciuto il peso tendente sino ad una certa misura, la tenacità resta superata dalla forza del peso, e la corda si spezza. Ha sperimentato M. Sauveur, che una corda d' acciajo si rompe, quando è tirata da un peso, che sia all' in circa 12000 volte maggiore del peso di 40 once del piede di Parigi di detta corda: che per ispezzare una corda d' ottone ci vuol un peso 9000 volte più grande del peso di 40 once d' essa corda: e per rompere una corda di rame, un peso 5000 volte maggiore del nominato peso d' once 40.

XVII. Esaminata quanto basta la premessa construzione rispettivamente agli allungamenti della corda AC, resta che si dicano alquante parole di quella porzione di curva da C verso A, in cui divenendo negativo il peso tendente, cioè a dire cangiandosi di tirante in premente, ci si presenta agli occhi una legge matematica, ma non fisica di compressioni della corda

AC.

AC. Per vedere come nelle compressioni si modifichi la formola del numero XV. il peso premente $mi = p$ abbia cagionato nella corda $AB = L$ tesa dal peso $P = dm$ l' accorciamento $Bd = l$, onde alla corda resti la lunghezza $Ad = L - l$, ed avremo per l' equazione al triangolo ADG; $dg = \overline{\frac{1}{2}b + P} \cdot \frac{\overline{L - l}}{L}$, e per l' equazione all' iperbola $gi = \frac{\frac{1}{2}bL}{L - l}$, e conseguentemente giacchè $di = mi - md = p - P$,

$$gi - dg = di = p - P = \frac{\frac{1}{2}bL}{L + l} - \overline{\frac{1}{2}b - P} \cdot \frac{\overline{L - l}}{L}.$$

Questa formola tira l' origine dalla espressione differenziale $dl = \frac{\overline{L - l} \cdot dp}{\frac{bL}{L - l} + P - p}$, la quale suppone, che la minima compressione dl sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile dp, che la produce, e della lunghezza $L - l$ della corda, ed inversa della differenza $\frac{bL}{L - l} + P - p$ fra la rigidità naturale della corda $\frac{bL}{\overline{L - l}}$, ed il peso $p - P = di$, che nella corda AC non istirata da forza alcuna ha cagionata la compressione Cd. Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente; riuscendo tanto più picciole, quanto è maggiore l' aggregato della rigidità, e del peso che preme.

Se L sarà la lunghezza d' un cilindro, ed b la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente P, e che in oltre sia $L - l$ la lunghezza, a cui si riduce la lunghezza del cilindro presso dal peso $P + p$, nel quale stato la rigidità naturale s' esprime per $\frac{bL}{L - l}$, si verificherà la seguente formola dif-

ferentiale $dl=\frac{\overline{L-l}\,.\,dp}{\frac{bL}{L-l}+P+p}$; la quale fendo un dato corpo privo di qualunque rigidità naturale, fi riduce alla quì regiftrata $dl=\frac{\overline{L-l}\,.dp}{P+p}$, ch' è quella ftefla da me ritrovata (num. XIV.) rifpettivamente all' aria. La mia conftruzione per tanto non dà la norma alle fifiche compreffioni dei corpi.

XVIII. La legge delle diftenfioni delle corde dinotata dalla equazione $\overline{\tfrac{1}{2}b+P}\,.\,\frac{\overline{L+l}}{L}-\frac{\tfrac{1}{2}bL}{L+l}=P+p$ vuol confermarfi colla efperienza. Dalla premefla formola fi deduce effere $b=\frac{\overline{2pL-2Pl}\,.\,\overline{L+l}}{\overline{2L+l}\,.\,l}$ (1), $L+l=\frac{L\,.\,\overline{b+2P}}{P+p+\sqrt{\overline{P+p}^{2}+b^{2}+2bP}}$ (2). Amendue queft' efpreffioni verranno a taglio per confrontare colla teorica alcuni efperimenti, che fono per riferire. Furono quefti da me fatti con fomma diligenza molti anni fà nella occafione di efaminare una legge, che appunto effi fperimenti mi fecero riconofcer per falfa. Raccomandata una corda di ottone al chiodo A (*Fig.* 7), il quale era diftante dallo fcanello NO once $32\frac{1}{2}$ del piede di Parigi equivalenti a linee 390, attaccai primieramente ad effa corda il pefo P di libre 2, e fegnai con inchioftro il punto B, in cui la corda toccava lo fcannello NO. Applicai pofcia alla corda il pefo $P+p$ eguale a libre $2+4=6$, ed offervai, che il punto B era difcefo fotto dello fcannello NO linee $1\frac{3}{8}$. Aggiunto poi al pefo $P=2$ il pefo $p=8$, onde il pefo totale $P+p$ foffe di libre 10, cagionò effo pefo aggiunto 8 la diftenfione di linee $2\frac{3}{4}$; la quale era doppia di quella prodotta dal pefo aggiunto 4. Nella equazione fegnata (1) fi faccia $L=390$,

$P=2$,

$P = 2$, $l = 1\frac{3}{8}$, $p = 4$, dati somministratici dalla prima sperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda tesa dal peso $P = 2$, cioè a dire $b = 1134 + \frac{37022}{68761} = 1134 + \frac{7}{13}$.
Dopo ciò nella equazione segnata (2) si ponga in cambio di b il ritrovato valore $L = 390$, $P = 2$, $p = 8$ peso aggiunto adoprato nella seconda esperienza, e si scoprirà l' allungamento generato dal peso $p = 8$, vale a dire $l = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$. Avendo colla esperienza rinvenuto $l = 2 + \frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, se si può sperare maggiore accordo fra il nostro canone, e l'esperimento, consistendo tutto il divario in $\frac{1}{207}$ di linea, minuzia totalmente inosservabile.

XIX. Merita riflessione la rigidità grande delle corde di metallo. La rigidità della nostra corda d' ottone equivaleva a libre $1134 + \frac{7}{13}$. La maniera, con cui si lavorano le corde sonore, aumenta moltissimo la loro rigidità. Diventano esse così sottili, passando innumerabili volte per trafila, che sempre più le costipa ed irrigidisce.

L' essere la rigidità b assai grande in relazione ai pesi adoprati nelle due sperienze, si è il motivo, per cui le distensioni $1 + \frac{3}{8}$, $2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$ sono adequatamente come i pesi aggiunti 4, 8. Fingasi b infinita, nel qual caso sarà infinitesimo l' allungamento l prodotto dal peso aggiunto p, che si suppone finito. Nella equazione (1) si cancellino tutti i termini rispettivamente nulli, e resterà $b = \frac{pL}{l}$, e conseguentemente $l = \frac{Lp}{b}$, da cui si deduce, che sendo $\frac{L}{b}$ quantità costante, le distensioni l stanno sempre come i pesi aggiunti p. Or ecco la ragione per cui essendo la rigidità b assai grande in riguardo ai pesi usati nelle sperienze, si sieno trovati gli allungamenti nella stessa adequata proporzione dei pesi aggiunti.

XX.

XX. Dalla osservazione, colla quale finisce il numero XVI. si raccoglie, che in una corda sono due cose diverse la rigidità, che ripugna alle distensioni, e la tenacità, che ne impedisce il rompimento fino ad un certo segno. Once $32\frac{1}{2}$ della corda usata nelle due descritte sperienze pesavano grani $7\frac{1}{2}$, dei quali 576 compongono un oncia. Facciasi $32\frac{1}{2} : 40 :: 7\frac{1}{2} : \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$; ed il quarto termine dell' analogia dinoterà il peso d' once 40 della nostra corda. Conforme la regola determinata per le corde d' ottone da M. Sauveur, nel citato numero da me riferita, moltiplicando il suddetto peso per 9000, il prodotto che ne risulta di grani $83076\frac{12}{13}$ = ad once 144 + grani $132\frac{12}{13}$ = a libre 12 + grani $132\frac{12}{13}$ s' eguaglia al peso, che romperebbe la corda, la cui tenacità per conseguenza è minore del peso di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$. Questo peso attaccato alla corda produrrebbe l'allungamento l = linee $3\frac{1}{2}$ un po scarse, al quale corrisponderebbe la rigidità naturale $\frac{bL}{L+l}$ = a libre $1124\frac{1}{2}$ a un dipresso; grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità della corda alquanto più picciola del peso di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$.

SCHE-

SCHEDIASMA II.

Delle compressioni dell' aria.

I. NEL precedente Schediasma ho detto delle compressioni dell' aria soltanto ciò, che cadeva a proposito: ora questa materia si vuol trattare distintamente. Il tubo cilindrico AF (*Fig.* 5) sia ripieno di un fluido compresso dal peso P, e la sua lunghezza AB si esprima per L. Al peso dato P aggiungasi il variabile p, che cagioni la compressione $AC = l$, e riduca la lunghezza della corda fluida alla misura $BC = L - l$. S' aumenti nuovamente il peso $P + p$ per la flussione dp, a cui si riferisca la minima compressione $Cc = dl$, e chiamata r la rigidità naturale del nostro fluido, col mezzo dei canoni stabiliti nel mentovato Schediasma rispettivamente alle corde solide, che si distendono, troveremo $b\,dl = \frac{\overline{L - l}\,.\,dp}{r + P + p}$ (1). Nelle corde solide il valore della rigidità r non è costante, ma va scemando, secondochè cala la loro base. Non così succede nella nostra corda fluida, la cui rigidità r si conserva invariabile, supponendosi eguali tutte le sezioni AH, CD.

II. Cerco le proprietà di un fluido, in cui se non altro nelle minime compressioni le densità stiano nella ragione de' pesi comprimenti. Conciossiachè le densità della stessa quantità di materia si corrispondano nella proporzione inversa de' volumi, e questi nel nostro caso sieno come $BC = L - l : Bc = L - l - dl$, ci si presenterà l' analogia $P + p : P + p + dp :: \frac{1}{L - l} : \frac{1}{L - l - dl}$, e conseguentemente l' equazione $\overline{P + p}\,.\,\overline{L - l} = \overline{P + p + dp}\,.\,\overline{L - l - dl}$, che si riduce così $\overline{P + p}\,.\,dl = \overline{L - l}\,.\,dp$. Nella formola (1) in vece di $\overline{L - l}\,.\,dp$ sostituisco lo scoperto valore, onde ne risulti $b\,dl = \frac{\overline{P + p}\,.\,dl}{r + P + p}$, ovvero $b = \frac{P + p}{r + P + p}$. Osservo che dovendo essere costante il coefficiente b, non può ciò effettuarsi se non nella circostanza, in cui $r = 0$, e $b = \frac{P + p}{P + p} = 1$. Quin-

di

di se almeno nelle minime compressioni le densità hanno da riferirsi nella ragione dei pesi comprimenti, deve il coefficiente b eguagliarsi all' unità, ed il fluido esser privo di rigidità naturale. S' incontra la medesima conseguenza, deducendo dalla equazione $b = \frac{P+p}{r+P+p}$ la grandezza di $r = \frac{\overline{1-b}.\overline{P+p}}{b}$. Dinotando r la rigidità naturale, di cui il fluido è fornito prima d' esser compresso, il suo valore non dee dipendere dal peso premente $P+p$; e per salvare questa indipendenza, non c'è altro ripiego, fuorchè porre come sopra $b=1$, $r=o$.

III. Ripiglio per mano la formola (1) $b\,dl = \frac{\overline{L-l}.dp}{r+P+p}$, o dividendo per $L-l$, $\frac{b\,dl}{L-l} = \frac{dp}{r+P+p}$, e passando all'integrazione trovo $b.\log.\frac{L}{L-l} + A = \log.\overline{r+P+p}$. Si determina la costante A riflettendo, che quando $p=o$, è parimente $l=o$, e perciò $A = \log.\overline{r+P} - b.\log.1$, e mettendo $\log.1=o$, $A=\log.\overline{r+P}$. Avremo per tanto $b.\log.\frac{L}{L-l} = \log.\frac{r+P+p}{r+P}$, e fatto il transito dai logaritmi ai numeri,

$$\frac{L^b}{\overline{L-l}^b} = \frac{r+P+p}{r+P} \quad (2),$$

equazione ad una delle infinite iperbole fra gli assintoti, ch' esprime la relazione fra le compressioni l di qualsivoglia fluido, e le forze p, dalle quali sono prodotte.

IV. Noto, che la supposizione $b=1$, $r=o$ ci dà $\frac{L}{L-l} = \frac{P+p}{P}$, ed indi l' analogia $P:P+p :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$: ma le quantità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ stanno come le densità del fluido compresso dai pesi P, $P+p$; dunque mettendo $b=1$, $r=o$, le densità del fluido accettano la proporzione dai pesi comprimenti non solo nelle compressioni minime, ma ancora nelle finite, nè si può dare flui-

fluido dotato di questa proprietà soltanto nelle infinitesime compressioni.

V. Fra gli assintoti BG, BH (*Fig.* 8.) si descriva l'iperbola IDL adattata all' equazione (2) $\frac{L^{b}}{\overline{L-l}^{\,b}} = \frac{r+P+p}{r+P}$.

in cui all'assissa $BA = L$ corrisponda l' ordinata $AD = r+P$. Tagliata $AK = r$, pei punti D, K si conducano parallele a BH le linee FDO, EKL, l' ultima delle quali intersecherà l' iperbola nel punto L, e determinerà l'ordinata $HL = r$. Per costipare vie più la colonna fluida $BA = L$, e ridurla all' altezza $BC = L - l$ egli è d' uopo al peso $KD = NM = P$ aggiungere $MI = p$, onde ne risulti l' ordinata $CI = r+P+p$. Che se si pretendesse di ridurre la colonna BA ad un' altezza infinitesima BC, si richiederebbe l' accrescimento di un infinito peso $MI = p$. Scemando il peso KD per la misura mi, la corda fluida $BA = L$ si dilaterà fino all' altezza $Bc = L + l$, e giungerà finalmente alla sua naturale lunghezza $BH = L + l$

$= \frac{L . \overline{r+P}^{\frac{1}{b}}}{r^{\frac{1}{b}}}$, quando essendo il peso levato $OL = KD = P$,

non sia più compressa da peso alcuno. La naturale lunghezza BH si scoprirà infinita in un fluido, che sia privo di rigidità, dimodochè $HL = r$ si eguagli a nulla, o almeno ad una minima quantità.

VI. C' insegnano le osservazioni, che quanto l' aria è meno compressa, tanto più si dilata, ne di questa sua rarefazione l' ultimo confine si è potuto mai discoprire. Si estragga pur a piacere l' aria dalla macchina del Boile, che la restante occuperà sempre tutto il recipiente, ne mai accaderà, che la parte inferiore dello stesso sia piena d'aria, e vuota la parte superiore. Egli è dunque manifesto, che in questo fluido, o non v' ha rigidità, ovvero essa dee riputarsi talmente minima, che dentro certi confini possa fisicamente trascurarsi con sicurezza, onde la ripugnanza al costipamento unicamente dipenda dalla forza che preme. Quindi rispettivamente all' aria si adempierà la

formola $\frac{L^b}{\overline{L-l}^b} = \frac{P+p}{P}$, o sia $\frac{L}{L-l} = \frac{\overline{P+p}^{\frac{1}{b}}}{P^{\frac{1}{b}}}$, e le densità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ staranno come i pesi comprimenti P, $P+p$ alzati alla dignità, il cui esponente $\frac{1}{b}$.

VII. Ora egli è d' uopo determinare il valore di b. Nell' antecedente Schediasma ho avvertito, che se b pareggia l' unità in riguardo alle corde d' aria, dee conservare la stessa grandezza anche rispettivamente alle corde solide. In fatti ci sieno due corde, una liquida, e l' altra solida, egualmente lunghe, del pari rigide naturalmente, pressa quella, e stirata questa dal medesimo peso P, e servendo ad entrambe la comune formola differenziale $b\,dl = \frac{L\,dp}{r+P}$, non si può assegnare ragione alcuna, per cui la forza minima dp non abbia da cagionare in amendue la stessa compressione, o allungamento dl. Il perchè in ambo i casi deve assegnarsi a b un pari valore, onde si conservi l' equazione $b\,dl = \frac{L\,dp}{r+P}$. Gli esperimenti frattanto ci hanno mostrato, che nelle corde solide è $b=1$; dunque tale è la sua grandezza anche nelle corde d' aria, le compressioni della quale relative ai pesi comprimenti sono per conseguenza espresse dalla formola $\frac{L}{L-l} = \frac{P+p}{P}$, la quale ci manifesta, che le densità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ abbracciano la proporzione dei pesi comprimenti P, $P+p$, e che la curva IDL è una iperbola Apolloniana.

VIII. Il caldo accresce l' elasticità dell' aria, il freddo la diminuisce. Acquisti l' aria maggior calore, e si muterà la proporzione fra la densità ed il peso comprimente; laonde acciocchè la colonna BA mantenga la pristina densità, si richiederà il peso più grande A 2 D. Descritta agli stessi assintoti BG, BH l' iperbola Apolloniana 2 I 2 D 2 L, che passi pel punto 2 D, determinerà essa la proporzione fra le lunghezze BA, BC della

Differenze fra le altezze dell' aria secondo l' esperienza, e secondo la teorica.	Differenze fra le altezze del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica.
$\frac{63}{478} = \frac{2}{31}$	$\frac{63}{368} = \frac{2\frac{17}{21}}{16}$

la corda aerea, ed i pesi comprimenti $A2D$, $C2I$. Conciossiachè $\frac{BA}{BC} = \frac{CI}{AD} = \frac{C2I}{A2D}$, avremo $AD = P : A2D :: CI = P + p : C2I$, e quindi posta $A2D = nP$; sarà $C2I = nP + np$, ed all' iperbola $2I2D2L$ competerà l' equazione

$$\frac{L}{L-l} = \frac{nP+np}{nP}.$$

IX. Affine di mettere la stabilita teorica alla prova della sperienza, prendo in prestanza dall' accuratissimo Boile alcuni esperimenti. L' aere da prima nel tubo riempieva uno spazio alto 12 dita Anglicane, e poscia col mezzo del mercurio si comprimeva, sicchè occupasse altezze sempre minori. Nell' annessa tavola la prima colonna indica le altezze dell' aria nel tubo, e la seconda le altezze del mercurio comprimente, l' une e l' altre espresse in dita Anglicane. Si avverta per altro, che col peso del mercurio si dee accoppiare quello dell' atmosfera, che parimente l' aria comprime, e che mentre il Boile faceva gli esperimenti, equivaleva a dita $29\frac{1}{8}$ di mercurio. Alle due mentovate aggiungo le colonne terza, e quarta contenenti, quella le differenze fra le altezze dell' aria, e questa le differenze fra le altezze del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica.

X. La molta irregolarità, colla quale procedono le due serie delle differenze fra le altezze dell' aria, e del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica, apertamente dimostra che le osservazioni, comechè diligenti, ci danno il prossimo, e non l' esatto. Nulladimeno a chiaro lume comprendesi, che corretti gli errori, anderebbero divenendo sempre più piccioli i termini della prima progressione, e sempre più grandi quelli della seconda. Se non ci fossero resistenze, i pesi espressi nella colonna quarta avrebbero cagionato compressioni eguali alle grandezze contenute nella colonna terza, ed esercitata quell' azione, che dalle accennate resistenze è stata impedita. Si rifletta frattanto, che coll' aria sono miste molte particole eterogenee poco o nulla costipabili, e che per conseguenza dallo stesso peso l' aria pura viene più dell' impura compressa. In fatti leggesi nel Tomo II. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna aver la

celebre Signora Laura Bassi coll' esperienza trovato, che l' umidità dell' aria ne diminuiva le compressioni. Aggiungasi che acquistando il volume delle particole eterogene tanto maggior proporzione a quello dell' aria pura, quanto essa è più costipata, si richiederanno accrescimenti di pesi vie più grandi ad ottenere quelle compressioni, che conforme la teorica, levati essi accrescimenti, seguirebbero nell' aria senza la mistione delle particole eterogenee.

XI. Oltre a ciò non dobbiamo porre in non cale i fregamenti dell' aere, e del mercurio contro l' interna superficie del tubo. La fregagione patita dall' aria più, o meno compressa la possiamo considerare come costante; imperciocchè stando essa in ragione composta della pressione, e della superficie del tubo occupato dall' aere, e questa come l' altezza, e l' altezza come il volume aereo, ed il volume inversamente come la densità, e la densità direttamente come la pressione a un di presso; ne segue che la fregagione suddetta è in proporzione composta diretta, ed inversa della pressione, e perciò costante. Altrettanto non può affermarsi del fregamento sofferto dal mercurio, il quale, conforme a che se ne infonde nel tubo una maggior quantità, s' aumenta al crescere del cumulo delle pressioni, e della superficie fregata.

XII. Divenendo adunque più grandi le resistenze, secondochè l' aria più si costipa, hanno esse da far equilibrio con una quantità maggiore di peso, e da impedire la compressione, che dallo stesso peso verrebbe prodotta, come realmente succede. E qui egli è d' uopo riflettere, che quando si affermano le densità dell' aria proporzionali ai pesi comprimenti, si parla dell' aria pura, e dalle resistenze prescindesi. Ho fatto vedere che nell' aria mista colle particole eterogenee, computate le resistenze, deggiono apparire le densità alquanto più picciole dei pesi comprimenti: e tali scoprendole gli esperimenti, confermano essi la già dimostrata teorica, la quale resterebbe convinta di falsità, se nell' aria impura frastornata dalle resistenze le altezze della colonna d' aria si fossero puntualmente trovate in ragione reciproca dei pesi, che la costipano.

XIII Non dissimulo una forte obbiezione, ed è, che in due giorni susseguenti ha la lodata Signora Laura Bassi osservato essere stata sufficiente una colonna di mercurio un dito minore

nore dell' altezza del barometro notata con sommo studio, per istringere l' aria nella metà dello spazio. In questi due casi non giova, anzi pregiudica la considerazione delle resistenze, rimosse le quali avrebbe bastato un peso ancora più picciolo, che dalla legge prescritta si sarebbe vie più allontanato. Quantunque molte cagioni possano aver prodotto il mentovato effetto, nulladimeno valendomi del principio stabilito dal Co. Jacopo Riccati mio Padre nell' ultimo Capitolo del Libro III. dei Principj, e dei Metodi della Fisica, cioè che se contro una teorica ben avverata si mette in campo qualch' eccezione, o difficoltà, di cui non si vede chiara la soluzione, non si può condannare l' uso moderato di qualche semplice ipotesi, la quale metta in calma la fantasia, e ci adombri un modo, onde si dilegui la proposta difficoltà; dico che non conservandosi sempre costante la proporzione fra la densità dell' aria, ed il peso comprimente, ma ricevendo variazione dal caldo, e dal freddo, l' effetto, di cui si parla, può aver tratta da questo fonte l' origine. Al peso A 2 D (*Fig.* 8.) corrisponda la corda d' aria BA; e se non si mutasse il calore dell' aria stessa, per costiparla sino in C, si renderebbe necessario il peso C 2 I. Si raffreddi l' aria nel tempo in cui si fa l' osservazione, e si adempierà la medesima compressione AC col peso CI minore di C 2 I.

XIV. Affine di maggiormente confermare la mia teorica, noto, che avendo dimostrato al numero VI. doversi nell' aria priva di naturale rigidità verificare la formola $\frac{L^{b}}{\overline{L-l}^{\,b}} = \frac{P+p}{P}$, si deduce da questa il valore di $b = \log.\left(\frac{P+p}{P}\right) \Big/ \log.\left(\frac{L}{L-l}\right)$, il quale ha da esser costante. Ricorro nuovamente agli esperimenti del Boile, e per non moltiplicare soverchiamente i calcoli, scielgo il primo, il duodecimo, ed il ventiquattresimo, e cerco i valori di b.

Sia come nella prima sperienza $L = 12$, $L - l = 11\frac{1}{2}$, $P = 29\frac{1}{8}$, $P + p = 29\frac{1}{8} + 1 + \frac{7}{16} = 30\frac{9}{16}$, e troveremo $b =$

$$b = \frac{\log.\left(\frac{30\frac{9}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\left(\frac{12}{11\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log.\left(\frac{489}{466}\right)}{\log.\left(\frac{24}{23}\right)} = \frac{209230}{184834}$$

$$= 1 + \frac{24396}{184834} = 1 + \frac{2}{15} \text{ in circa.}$$

Nella sperienza duodecima abbiamo $L-l=6$, $P+p=58\frac{13}{16}$, e questi dati accoppiati colle quantità invariabili $L=12$, $P=29\frac{1}{8}$ determinano $b = \frac{\log.\left(\frac{58\frac{13}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\ 2} = \frac{\log.\left(\frac{941}{466}\right)}{\log.\ 2} =$

$$\frac{3052033}{3010300} = 1 + \frac{41733}{3010300} = 1 + \frac{1}{72}.$$

L'ultima sperienza c'insegna essere $L-l=3$, $P+p=117\frac{9}{16}$, e quindi scopriremo $b = \frac{\log.\left(\frac{117\frac{9}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\ 4} = \frac{\log.\left(\frac{1881}{466}\right)}{\log.\ 4} =$

$$\frac{6060029}{6020600} = 1 + \frac{39429}{6020600} = 1 + \frac{1}{153}.$$

La varietà dei valori di b, ch' esser dovrebbe costante, ci fa toccare con mano, che gli esperimenti vengono turbati da elementi estrinsechi, che in essi s' insinuano, tolti di mezzo i quali, si troverebbe stabilmente $b=1$, conforme richiede la legge delle densità proporzionali ai pesi comprimenti. Posto $b<1$, le densità sarebbero proporzionatamente maggiori dei pesi comprimenti, ed il contrario succederebbe ammessa l' ipotesi di $b>1$. Ora intan-

to

to l' esperienze del Boile ci danno $b > 1$, inquanto che restando in parte impedita dalle resistenze la costipazione, le densità appariscone a proporzione più picciole dei pesi comprimenti.

XV. Riservo all' ultimo luogo l' argomento più convincente. Quando si propaga il suono, le fibre aeree di pari lunghezza componenti una corda o raggio sonoro cominciano una dopo dell' altra per eguali intervalli di tempo le loro vibrazioni unisone a quelle del corpo che suona, e che per conseguenza si effettuano colle leggi di un pendolo a cicloide. Dal principiarsi successivamente il moto, ne segue che le dette fibre si costipano, che si acresce la loro elasticità, e che dalla differenza delle elasticità di due fibre vicine divisa per la massa della fibra meno compressa viene determinata la forza acceleratrice della stessa fibra, la qual forza ha da essere proporzionale alla distanza dal punto medio della vibrazione, se l' aria può oscillare colle leggi di un pendolo cicloidale.

Sia dx la lunghezza di una fibra, mentre sta in equilibrio col peso dell' atmosfera, e $dx - dq$ sia la lunghezza della medesima fibra costipata per la quantità rispettivamente minima dq. Se il principio si assume, che le forze elastiche stiano nella ragione inversa delle lunghezze, cioè a dire come $\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dq}$, le forze acceleratrici si trovano proporzionali alle distanze dal punto medio della oscillazione, conforme vedremo nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII., e l'aria può in se ricevere il moto vibratorio colle leggi di un pendolo a cicloide. Ora essendo anche le densità in ragione reciproca delle lunghezze dx, $dx - dq$, ed uguagliandosi le forze elastiche alle forze comprimenti, colle quali si equilibrano, dall' ammesso principio ne nasce, che le densità delle fibre aeree si corrispondano nella proporzione delle forze comprimenti. Ciò posto adunque ne risultano le forze acceleratici come le distanze dal punto di mezzo della vibrazione, e l' aria può oscillare non altrimenti che un pendolo a cicloide: ma l' aria in fatti si vibra con questa legge; dunque tornando indietro per le stesse vestigia, troveremo, che nelle menome compressioni le densità dell' aria hanno da stare come le forze comprimenti. E giacchè ho provato al numero IV. che se nelle compressioni infinitesime le densità stanno come i pesi comprimenti, accettano la stessa proporzione an-

anche nelle compressioni finite; chiaramente si scopre, che questa proprietà compete all' aria nelle costipazioni dell'uno, e dell' altro genere. Quindi siccome non si può dubitare, che al vibrarsi di un corpo sonoro l' aria non oscilli con legge simile, mentre ce ne porta il suono all' orecchio; così è del pari certo, che le densità dell' aria seguitano la proporzione delle forze, che la costipano.

XVI. Ho asserito soltanto, che le densità dell' aria si riferiscono nella ragione delle forze comprimenti, quando le costipazioni stanno dentro i limiti dell' infinitesimo, e del finito; perchè sono persuaso, che questo canone non possa aver luogo nelle dilatazioni, e nelle compressioni infinite, alle quali dovrebbe corrispondere la lunghezza della corda aerea o immensa, o eguale a nulla.

Quantunque cogli esperimenti non si abbia mai potuto trovare l' ultimo confine delle dilatazioni dell' aria, nulladimeno dobbiamo crederle grandissime sì, ma finite. Quindi fa d' uopo assegnare alla rigidità naturale un valore fisicamente minimo, e non già uguale a nulla. Finchè la forza premente ha una massima proporzione alla rigidità naturale, si può questa trascurare, e le densità abbracciano dei pesi comprimenti la proporzione. Che se questi pesi sono talmente diminuiti, che non sia più lecito trasandare la rigidità, allora si muta legge, e vale la formola

$$\frac{L}{L-l} = \frac{r+P+p}{r+P}.$$

Se conforme l' idea matematica del Cavalier Nevvton l' aria fosse formata di punti, che si respingessero con forze in ragione inversa delle distanze, le sue densità conserverebbero sempre la proporzione dei pesi comprimenti benchè all' infinito aumentati. Ma concios̄siachè le particole elementari aeree per altro menomissime non passino i termini del finito; non può continuare ad avverarsi il canone stabilito, qualora la lunghezza BC (*Fig.* 5) della corda d' aria si finga talmente picciola, che per giungere ad una così grande costipazione, fosse necessario, che le particole aeree si compenetrassero l' una coll' altra.

SCHE-

SCHEDIASMA III.

Della proporzione fra le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese, ed i varj effetti da esse forze cagionati. Colla stessa occasione si ragiona della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte.

I. Qualora alla metà di una corda tesa, e a due scannelli appoggiata si applica a squadra una forza, ripiega essa la detta corda per un determinato spazio, o saetta, ne allunga egualmente le due metà, ed accresce del pari la loro tensione. Dei mentovati tre effetti, e colla stessa occasione anche della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte, terrò discorso nel presente Schediasma. Il Conte Jacopo Riccati mio Padre trattando prima d' ogni altro questa materia in una sua Dissertazione inserita nel Tomo I. de' supplementi al Giornale d' Italia, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere, suppone primieramente, che la forza $DH = f$ (*Fig. 9*) dell' obbietto esterno agisca tutta raccolta nel punto medio C della fibra AB $= 2L$, dimodochè essa fibra mediante l' azione della forza DH prenda la figura triangolare ADB. Suppone in secondo luogo, che continuata la linea BD verso I, e condotta HI parallela ad AD, onde la forza DH si risolva nelle due HI, DI, e delineata col raggio BC la porzione di circolo CE, la distensione $ED = l$ sia cagionata dalla forza DI; il che, come vedremo, succederebbe soltanto, se si uguagliasse a nulla la forza P tendente la fibra nella sua naturale positura ACB. Suppone finalmente in terzo luogo, che gli allungamenti $ED = l$ serbino sempre la ragione delle potenze DI. Ora giacchè mi è riuscito nello Schediasma I. di scoprire le vere relazioni fra le distensioni $ED = l$, e le forze, che direttamente le generano, ho presa risoluzione di maneggiare la cosa con maggior generalità, non ritenendo salvo, che la prima fra le tre supposizioni del Conte Jacopo mio Padre.

Trovare la proporzione fra le saette, e le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese appoggiate a due scannelli, e raccomandate a due chiodi immobili.

II. Al punto di mezzo C della corda $AB = 2L$ raccomandata a due chiodi immobili A, B, e tesa da una forza equivalente al peso dato P, si applichi con direzione normale ad AB la forza $DH = f$, la quale produca la saetta $CD = s$; si cerca la relazione fra la forza f, e la saetta s. Rifletto, che la semicorda $BD = BE + ED = L + l$ è tesa nella positura ADB da una forza, o peso $DI = P + p$ maggiore di quello uguale a P, che la stirava nella situazione ACB, per la quantità accresciuta p, da cui, e non da $DI = P + p$ (eccettuato il caso di $P = o$) è stato prodotto l' allungamento ED, conforme a ciò che ho spiegato nel citato Schediasma I. Chiamo b la rigidità naturale della corda nel sito ACB, ed il mentovato Schediasma m' insegna essere $\overline{\frac{1}{2}b + P} \cdot \overline{\frac{L+l}{L}} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = P + p$ (1). Tirata la linea IG parallela ad AB, la similitudine dei triangoli BDC, IDG suggerisce l' analogia
DG : DI : : DC : BD
$\frac{1}{2}f : P+p :: s : L+l$, da cui si deduce l' equazione
$\frac{\overline{P+p} \cdot s}{L+l} = \frac{1}{2}f$ (2). Finalmente il triangolo rettangolo BCD ci somministra la formola $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2}$

$L + l = \sqrt{L^2 + s^2}$ (3). Nella equazione (2) in cambio di $P + p$ si sostituisca il suo valore preso dalla equazione (1), e si avrà, adempiuti i necessarj calcoli, $\frac{\overline{b + 2P} \cdot s}{L} - \frac{bLs}{\overline{L+l}^2} = f$. In vece di $L + l$ pongasi il suo valore contenuto nella equazione (3), e si scoprirà

prirà $\frac{\overline{b+2P}\,.\,s}{L} - \frac{bLs}{L^2+s^2} = \frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3+Ls^2} = f\,(4)$, formola ch' esprime la relazione cercata fra le saette s, e le forze f, che le producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola, poniamola al cimento della esperienza. Da essa formola si deduce quest' altra $b = \frac{L^3 f + Lfs^2 - 2PL^2 s - 2Ps^3}{s^3}$ (5).

Ora perchè qualunque, benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta s, porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità b della corda A C B tesa dalla forza equivalente al peso P; fa d'uopo rettificare il valore della saetta s prodotta dalla forza f, paragonando insieme i suoni delle due semicorde C B, D B. Il suono, o numero n di vibrazioni, che fa la corda C B per esempio in un secondo, s'eguaglia all' unità divisa pel tempo t, durata di una d' esse vibrazioni espressa in parti di secondo, onde abbiasi l' equazione $n = \frac{1}{t}$: ma nelle corde fisiche di massa m, che si vibrano di traverso, $t = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}$, dinotando la quantità $36\frac{17}{24}$ la lunghezza d' un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo; dunque $n = \frac{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}}{\sqrt{Lm}} \cdot \frac{355}{113}$. Ed avvegnachè rispettivamente a qualunque corda le grandezze $36\frac{17}{24}$, $\frac{355}{113}$ sono sempre costanti, ne segue, che generalmente il suono n è come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Lm}}$. Se il peso, o forza tendente P si mantiene costante, e la massa m della corda sta come la lunghezza L, il

che interviene nelle corde, che non differiſcono ſalvo che nella lunghezza; allora ſi trova n come $\frac{1}{L}$, o ſia il ſuono in ragione inverſa della lunghezza della corda. Se la maſsa m non ſi diverſifica, il che ſuccede nelle ſemicorde, CB, DB; in tal caſo ſi ſcopre n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione compoſta, diretta dimezzata della forza tendente P, ed inverſa parimente dimezzata della lunghezza L. Ho notate queſte due circoſtanze, perchè verranno a taglio nelle noſtre ſperienze.

IV. Si determinerà la proporzione fra i ſuoni n, N delle corde CB, BD col ſeguente metodo. Si prenda una corda acb (*Fig.* 10) uniſona all' ACB, e ſi ſottoponga ad eſsa uno ſcannello d in ſito tale, che le corde db, DB ſi corriſpondano all' uniſono, e ne ſeguirà che i ſuoni n, N ſtaranno fra loro in ragione inverſa di cb a db, onde ſi verifichi l' analogia $n:N$ :: db : cb. La dimoſtrazione è ſempliciſſima. I ſuoni delle due corde cb, db teſe dallo ſteſso peſo, e che non differiſcono ſalvo che nella lunghezza, ſerbano la ragione inverſa delle lunghezze cb, db, ch' è quanto dire ſi corriſpondono nella proporzione db : cb: ma le corde cb, db ſono uniſone alle corriſpondenti CB, DB; dunque i ſuoni n, N di queſte ultime ſtanno come db : cb.

V. Inſegnata la maniera di ſcoprire la proporzione fra i ſuoni n, N, m' inoltro ad indagare qualmente per le ſpecie n, N, e per le altre quantità date ſi poſsa eſprimere il valore della ſaetta $CD = s$. Eſſendo pari la maſſa delle corde CB, BD, le lunghezze come $L : L+l$, i peſi tendenti come $P : P+p$, avremo per le coſe dette nel numero III. $n:N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}$, o ſia $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l}$: ma conforme ſi è fatto vedere al numero II. $\frac{P+p}{L+l} = \frac{\frac{1}{2}f}{s}$; dunque ſoſtituito queſto valore in

cam-

cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella sovrapposta analogia, si avrà

$n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{\frac{1}{2}f}{s}$, e conseguentemente l' equazione
$\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$ *(6)*.

VI. Al punto medio C della corda d' ottone A B situata orizzontalmente, la cui semilunghezza C B $= 30$ mezz' oncie, e la forza tendente P equivalente ad once 140, attaccai il peso o forza D H $= f = 4$, la quale produsse la saetta C D $= s$, che con diligente misura trovai eguale a $\frac{3}{7}$. I suoni n, N delle semicorde C B, D B, usato il metodo esposto al numero IV., li ritrovai corrispondersi nella ragione $119 : 120$. Quindi si verificava essere

$n^2 : N^2 :: \overline{119}^2 : \overline{120}^2$, o sia prossimamente $118 : 120 :: 59 : 60$, e passando alla equazione, $\frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}$. Sostituiti nella formola del numero precedente $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$, in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di f, di L, e di $2P$ i valori somministratici dalla sperienza, avremo $s = \frac{59}{60} \cdot \frac{4 \cdot 30}{2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$. La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la saetta rettificata differisce da quella, che s' è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza di chi esperimenta, consistendo in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato della saetta C D $= s = \frac{59}{140}$ nella formola (5), si troverà dopo i necessarj computi $b =$ ad once $24054 =$ a libre $2004\frac{1}{2}$, valore della rigidità naturale della corda A C B cor-

ris-

rispondente al peso, o forza tendente $P=$ ad once 140.

VII. Applicai al punto medio C della corda ACB la forza $f=15\frac{3}{5}=\frac{78}{5}$, la quale cagionò la saetta $CD=s$, che accuratamente misurata si trovò eguale a $\frac{7}{5}$. I suoni n, N delle due semicorde CB, DB serbavano la proporzione 11:12. Se col mezzo della relazione dei suoni cercheremo il valore della saetta, scopriremo $CD=s=\frac{1573}{1120}=\frac{7}{5}+\frac{1}{224}$. La differenza $\frac{1}{224}$ si sottragge all' attenzione dei più circospetti osservatori. Sostituiscasi nella formola (5) in cambio di b il valore determinato nel numero antecedente, ed in vece di L, f, P le grandezze 30, $\frac{78}{5}$, 140 giusta la presente sperienza, e poste in opera le regole per isciogliere l' equazioni cubiche, ci si presenterà $s=\frac{211}{150}=\frac{7}{5}+\frac{1}{150}$. La $\overline{150}^{ma}$ parte di mezz' oncia consiste in $\frac{1}{25}$ di linea, divario totalmente inosservabile. Molto minore si è la differenza fra i due valori $\frac{211}{150}=\frac{7}{5}+\frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120}=\frac{7}{5}=\frac{1}{224}$, il primo somministratoci dalla nostra equazione, ed il secondo dedotto dalla proporzione fra i suoni delle due semicorde CB, DB. Chi vorrà schivare l' imbroglio di diciferare la sovrapposta equazione (5) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $s=\frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità b, che troverà eguale ad once 24013, e pochissimo differente dall' altro determinato nel numero precedente uguale ad once 24054. La cagione di questa diversità dipende da qualche picciola adequazione usata nello stabilire la grandezza della saetta $s=\frac{211}{150}$.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la saetta scoperta colla misura, e quella, che abbiamo dedotta dalla nostra equa-

equazione, altrettanto riesce menomissima l' alterazione, che la saetta $s = \frac{211}{150}$ introduce nella proporzione dei suoni $n:N$, che s' è rinvenuta come 11 : 12. Giacchè nel numero V. abbiamo dimostrato essere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$, avremo per conseguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2Ps}{fL}$, e fatti $P = 140$, $s = \frac{211}{150}$, $f = \frac{78}{5}$, $L = 30$, si troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragioni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ somministrateci, quella dalla nostra formola, e questa dalla osservazione, consiste nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che prossimamente equivale alla seguente $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati dei suoni n^2, N^2, una ricavata dalla formola, e l' altra scoperta colla esperienza c' è il divario $\frac{639}{638}$; fra le ragioni dei suoni n, N passerà la differenza $\frac{638\frac{1}{2}}{638} = \frac{1277}{1276}$, la quale adempiuti i dovuti calcoli, si trova equivalere alla decimasesta parte di un comma, minuzia, di cui l'orecchio non se ne accorge.

IX. Si conchiuda, che l'esperienza conferma la verità della mia teorica, andando essa d' accordo con quella maggiore fisica adequazione, che in così fatte indagazioni può mai sperarsi. Noto per altro, che se alla metà della corda A B si applicassero forze notabilmente maggiori dell' adoprata nell' esperimento secondo, ne risulterebbero saette alquanto più picciole di quelle, che richiede il mio canone; perchè in esso si è trascurata la resistenza, che patisce la corda ripiegandosi nei siti A, D, B.

X. Affine d' internarmi più a fondo nel magistero della Na-

Natura, la quale ha collocato le fibre in maniera, che ricevano di traverso le impressioni degli obbietti esterni, darò prima la costruzione della formola (4)

$$\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}=\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^2}{L^3+Ls^2}=f,$$ e fatte le dovute considerazioni sopra la relazione fra le saette s, e forze f, che le producono, indagherò quali conseguenze derivino dalla varia modificazione delle costanti P, b, L, che dinotano la tensione, la rigidità, e la metà della lunghezza della fibra AB, mentre si trova in linea retta. M'inoltrerò poscia ad esaminare con simile metodo la proporzione fra le forze f, e le aumentazioni l di lunghezza, e p di tensione da esse forze cagionate nella fibra AB.

XI. Segnate a squadra (*Fig.* 11.) le linee $CF=L$, $FK=2P+b$, pei punti C, K tiro la linea CK, che continuo indefinitamente, ed a questa faccio perpendicolare KT, che taglia la linea CF prodotta nel punto T. Col vertice C, parametro CT, e colla condizione che le coordinate formino l'angolo CKF, descrivo la parabola Apolloniana CQV. Segno arbitrariamente l'assissa CG, e condotta l'ordinata GQ, che si continui fino in D, delineo $CB=L$ parallela a DG, e congiungo con una linea i due punti B, Q. Si tagli $FA=2P$, onde resti $AK=b$, e si tiri AX normale a KT. Determinata $CR=KX$, e descritta RZ parallela a BQ, facciasi $GH=CZ$, ed il punto H apparterrà alla curva CHE, che si vuol descrivere, le cui assisse $CD=s$, e le ordinate $DH=f$. Pel punto B si meni BP parallela a CK, e si continui DG fino in P.

Per la proprietà della parabola CQV si verifica l'equazione $\frac{\overline{CG}^2}{CT}=GQ$. La somiglianza dei triangoli CDG, CFK, CKT mi somministra le analogie $CD:CF::CG:CK$, $CD:CK::CG:CT$. Dalla prima ricavo essere $CD:CK::\overline{CD}^2:CF.CG$, e quindi la seconda prende il seguente aspetto $\overline{CD}^2:CF.CG::CG:CT$, e mi da l'equazione

re $\frac{\overline{CD}^2}{CF}=\frac{\overline{CG}^2}{CT}$. Avremo adunque $GQ=\frac{\overline{CD}^2}{CF}=\frac{s^2}{L}$, a cui aggiunta $GP=L$, si forma $PQ=L+\frac{s^2}{L}=\frac{L^2+s^2}{L}$. I triangoli simili, QPB, RCZ suggeriscono l' analogia $PQ:PB=CG::RC=KX:CZ$, da cui deducesi l' equazione $CZ=\frac{CG.KX}{PQ}$: ma stante la similitudine dei triangoli CDG, KXA abbiamo $CD:CG::KX:AK$, e conseguentemente $CG.KX=CD.AK$; dunque $CZ=HG=\frac{CD.AK}{PQ}$, o sia analiticamente $CZ=HG=\frac{bLs}{L^2+s^2}$. Finalmente l' analogia, che ci viene additata dai triangoli simili CDG, GFK, cioè a dire $CF:FK::CD:DG$

$L:\overline{2P+b}::s:\frac{\overline{2P+b}.s}{L}$ determina il valore di $DG=\frac{\overline{2P+b}.s}{L}$. Avremo per tanto $DH=DG-HG=\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}$: ma $\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}=f$; dunque posta $CD=s$, sarà la corrispondente ordinata $DH=f$.

XII. La nostra curva è fornita d' un altro ramo simile al CHE, nel quale tanto le saette s, quanto le forze f sono negative. Questo ramo serve per le saette Cd (*Fig.* 9) della corda AB.

La linea $HG=\frac{bLs}{L^2+s^2}$ (*Fig.* 11) ha un massimo valore $KE=\frac{1}{2}b$: corrispondente a $CD=s=CF=L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQV nel punto V, e l' angolo CBQ, ed altresì l' eguale CRZ ascendono al massimo, e massima conseguentemente diviene la grandezza di $CZ=HG$

Concioſſiachè DH $= f = \frac{\overline{2P+b}.s}{L} - \frac{bLs}{L^2+s^2} = \frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$, e DY $= \frac{2Ps}{L}$, formola naſcente dall' analogia

CF : CD : : FA : DY

L : s : : $2P$: $\frac{2Ps}{L}$, ne riſulta YH $= \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$, valore della intercetta fra l' inclinata CA, e la curva CHE.

Quando le ſaette s ſono minime, l' intercetta YH $= \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$ ſcopreſi infiniteſima del terzo grado, ed incomparabile con DY $= \frac{2Ps}{L}$ infiniteſima del primo grado. Cancellato adunque il termine riſpettivamente nullo, ci ſi preſenta DH $=$ DY $= f = \frac{2Ps}{L}$, ed in queſto caſo le ſaette ſono come le forze, verificandoſi la proporzione L : 2P : : s : f. Non traſcuro di avvertire, che la linea CA tocca la curva CHE nel punto C.

Se le ſaette diveniſſero infinite, ipoteſi per altro, che non è fiſica, traſandato il termine infinitamente picciolo $\frac{bLs}{L^2+s^2}$ $=$ HG, ſi troverebbe DH $=$ DG $= \frac{\overline{2P+b}.s}{L} = f$; eſpreſſione, da cui dedurrebbeſi l'analogia L : 2P$+b$: : s : f, la quale c' inſegnerebbe, che anche in tal circoſtanza le ſaette ſerberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da ſcoprire, che la linea CK ſerve d' aſſintoto alla curva CHE h, la quale giace tutta dentro l' angolo KCA.

XIII. Nei caſi intermedj, mentre cioè le ſaette ſono finite, meno creſcono, o ſcemano le ſaette di quello creſcano, o ſcemino le forze, che le producono; dovendoſi per gradi paſſare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P+b$.

Per dimoſtrar ciò rigoroſamente, ſia CD $= s$, e conſeguente-

temente $DH = f = \frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$. Si segni $Cd = ns$, vale a dire in qualunque proporzione con CD, e si avrà $dh = \varphi = \frac{2Pns}{L} + \frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}$. Se le forze serbassero la ragione delle saette, dovrebbe essere $nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{bns^3}{L^3+Ls^2} = F = \frac{2Pns}{L} + \frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}$. Ora io dico, che posto $n > 1$, e per conseguenza $ns > s$, è parimente $F > nf$, e posto $ns < s$, è parimente $F < nf$; laonde meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono.

Comincio dal provare, che ad $n > 1$ corrisponde $F = \frac{2Pns}{L} + \frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2} > nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{bns^3}{L^3+Ls^2}$. Se così è, tolto di mezzo il termine comune $\frac{2Pns}{L}$, resterà $\frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2} > \frac{bns^3}{L^3+Ls^2}$, e dividendo per $\frac{bns^3}{L}$, $\frac{n^2}{L^2+n^2s^2} > \frac{1}{L^2+s^2}$. Moltiplico ambo i membri per $L^2+n^2s^2 . L^2+s^2$, e mi si presenta $n^2L^2+n^2s^2 > L^2+n^2s^2$; e sottratta la quantità comune n^2s^2, $n^2L^2 > L^2$, o sia $n > 1$, conseguenza vera, e conforme alla ipotesi stabilita.

Se si supporrà $n < 1$, ne seguirà essere $n^2L^2 < L^2$, ed indi tornando in dietro per la strada or ora calcata, si scoprirà $F = \frac{2Pns}{L} + \frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2} < nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{bns^2}{L^3+Ls^2}$.

XIV. Egli è per tanto manifesto, che stando dentro i limi-

miti delle quantità finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti c'insegna l' esperimento sopra riferito al numero VI. che applicata al punto medio di una corda, la cui semilunghezza $L = 30$, la forza $f = 4$, produsse questa la saetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra i suoni della corda mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza f, la stessa saetta si scoprì eguale a $\frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$, e questo valore si è stabilito fisicamente giusto. Se le saette crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la saetta S generata dalla forza $F = \frac{78}{5}$ colla seguente analogia $4 : \frac{59}{140} :: \frac{78}{5} : S = \frac{2301}{1400} = \frac{8 + \frac{61}{280}}{5}$. Ricorrendo all' esperimento descritto al numero VII. osserviamo, che la forza $\frac{78}{5}$ cagionò una saetta, che, o sia eguale a $\frac{7}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a $\frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, come si trovò col mezzo della proporzione dei suoni, è sempre notabilmente minore di $\frac{8 + \frac{61}{280}}{5}$. Con ragione adunque ho poco fa asserito conformarsi colla esperienza la legge, che non oltrepassando i termini delle grandezze finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. M' innoltro alle conseguenze fisiche, e noto, che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come vedremo dappoi, adequatamente costante la natural tensione della fibra, sa questa le sue vibrazioni più, o meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell' anima sensazioni più, o meno forti, ma tutte ag-

aggradevoli. Che se la forza s' aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si stira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che mentre le forze non sono minime, più crescono le forze delle saette. La forza f generi la saetta s, e sia $2s$ quella saetta, che comincia a danneggiar l' organo; e conciossiachè ci vuole una forza maggiore di $2f$ per produrre la saetta $2s$, ne segue che la forza $2f$ si dee contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Considero presentemente le alterazioni, che cagiona nelle saette s la varia grandezza della rigidità b. Presa nuovamente per mano la formola $\frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3+Ls^2} = f$, rifletto, che posta la saetta s infinitesima, e stando la rigidità b dentro i termini del finito, la linea $YH = \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{2Ps}{L}$. Quindi in tale ipotesi, qualunque sia il valore finito della rigidità b, la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $s = CD$.

Si fingano infinite le saette s, e si troverà $DH = DG = f = \frac{2P+b}{L} \cdot s$: formola, da cui si ricava, che nella detta circostanza più cresce, o cala la rigidità b di quello che al contrario calino, o crescano le saette s generate dalla forza invariabile f. Ciò tanto maggiormente si verifica, mentre si tratti di saette finite.

Che se queste si assumano minime fisicamente, quali sono rispettivamente alla lunghezza delle fibre le saette in esse operate dalle forze non nocive degli oggetti esterni; si cavi la conseguenza, che per diversificare notabilmente le saette prodotte da una forza data, bisogna, che le rigidità stiano fra loro in una proporzione molto lontana. L' esperienza c' insegna, che le sensazioni d' un uomo adulto sono più vive di quelle d' un vecchio, e meno vive di quelle d' un giovane. S' inferisca dunque, che gran diversità ci ha da essere fra le rigidità delle fibre d' un

un adulto, d' un vecchio, e d' un giovane, e si ammiri l' artifizio dell' Autore della Natura, che ciò non ostante le sensazioni per una parte non isvaniscano, e per l' altra non divengan moleste. Merita d' essere distintamente avvertita la bellissima proprietà, che i discapiti dell' organo superano di gran lunga quei delle sensazioni.

XVII. Sia s la minima saetta, fino a cui faccia d' uopo incurvare una fibra di data massa, tensione, e lunghezza, perchè vibrandosi risvegli nell' anima una distinta sensazione. La forza f operi questa saetta nella fibra d' un uomo adulto, la cui rigidità b. Per produrre la stessa saetta nella fibra d' un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H, ci vorrà una forza più grande F. Quindi la forza primiera f genererà nella fibra del vecchio una saetta minore di s, a cui non corrisponderà sensazione distinta. In fatti osserviamo, che per farci intendere dai vecchi, bisogna alzare la voce, e che a quel lume fiacco, a cui legge un adulto, non legge un vecchio. Per la stessa ragione un lume ancora più tenue basterà ad un giovane, e non ad un uomo adulto.

Ma questo vantaggio, che le fibre d' un giovane sieno più pieghevoli di quelle d' un adulto, viene compensato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione delle forze esterne restino danneggiate. Suppongasi s la massima saetta, che non porta pregiudizio ad una fibra. Venga questa prodotta dalla forza f nella fibra di un adulto, la cui rigidità b: egli è chiaro che la stessa forza innocente in riguardo all' adulto, recherà nocumento alla fibra più molle dell' uomo giovane, cagionando in essa una saetta maggiore di s, che si suppone la massima fra quelle, che all' organo non sono nocive. E' stato sperimentato in Bologna, che l' empito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età consistente, riesce ai giovanetti sommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini sani, ed adulti sono nell' ottimo stato di perfezione. Le ha il sapientissimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impressione sensibile, ma non nociva la forza ordinaria di quegli oggetti esterni, con cui siamo in commerzio, e dei quali importa alla nostra conservazione, ed al nostro ben essere, che ci accorgiamo. Prima di giungere alla virilità, le fibre non sono ancora quanto ba-

basta robuste, per resistere a certe forze più vigorose: ma quando poi c' incamminiamo dalla virilità alla vecchiaja, il mondo sensibile (per valermi d' una espressione, con cui dà fine il Conte Jacopo mio Padre alla sua sopraccitata dissertazione) si va per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno fastidio quegli oggetti, che in tempo di sanità riuscivano loro gratissimi. Nelle stanze degl' infermi bisogna chiudere le finestre, parlar sottovoce; perchè la forza anche moderata della luce, e del suono gli offende. Questi effetti credo, che poco o nulla dipendendo dalla rigidità, che nelle fibre degli uomini infermi si scemi, traggano principalmente l' origine dal minoramento della forza de' muscoli, che pongono in tensione le fibre, la qual forza da me si esprime per la lettera P. Mi accingo dunque a far vedere a chi legge, quanto influisca nelle sensazioni l' alterazione d' un sì fatto elemento.

XIX. Supposta nulla la forza P, che stira la fibra, mentre si trova in linea retta, svanisce nella Fig. 11. la linea $FA = 2P$, e la linea CA cade sopra la CF. Perciò in tale ipotesi

avremo $YH = f = \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2}$, e posto che s sia minima rispettivamente ad L, $YH = f = \frac{bs^3}{L^3}$, conforme ha ritrovato il Conte Jacopo mio Padre nel suo schediasma.

Più conseguenze si possono dedurre dalla premessa formola: e primieramente per cagionare uguali saette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alle rigidità. Che se la forza esteriore fosse costante, le saette starebbero inversamente come le radici cubiche delle rigidità. Quindi si scopre quanto giovi alla buona economia delle sensazioni, che le fibre sien poste in tensione, avendo non ha molto osservato, che la diversa misura della rigidità altera pochissimo le picciole saette, che dalle fibre tese nell' oscillare si scorrono.

Serbando le forze la ragione dei cubi delle saette, non si compirebbero in pari tempo le vibrazioni più o meno dilatate della stessa fibra, imperciocchè richiede necessariamente l' isocro-

cronismo, che le forze stiano come le saette, o come gli spazj da passarsi.

Finalmente le fibre non istirate riuscirebbero inettissime per oscillare, perchè in una vibrazione s' impiegherebbero un tempo infinito. Fingasi tutta raccolta nel punto D (*Fig.* 12.) la massa della corda A D B, il che non turba l' essenzial delle deduzioni. La scala delle forze sollecitanti riferite alle saette, o sia agli spazj da percorrersi sarebbe la parabola cubica C n N corrispondente all' equazione $\frac{L^3}{b} . f = s^3$, le cui ordinate D N, d n esprimono le forze, e le assisse D C, d C le saette. Sanno i Geometri, che la forza viva acquistata dalla corda A B, quando è ritornata nella positura A C B, s' eguaglia all' aja C D N n C, la qual è proporzionale a $\overline{DC}^4$, ch' è quanto a dire ad una flussione infinitesima del quarto grado. Essendo finita la massa della corda concentrata in D, ne segue che il quadrato della velocità nel sito C deve ascriversi al quarto ordine delle quantità minime, e che per conseguenza la detta velocità spetta al secondo grado degl' infinitamente piccioli. Ora con una velocità, che al più giunge ad essere infinitesima dell' ordine secondo, non si può passare lo spazio D C minimo del primo grado, salvo che in tempo infinito. Se alle saette infinitesime si sostituiranno le fisicamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimossa dalla linea retta A C B una fibra priva di tensione, si fermerebbe senza restituirsi nella situazione A D B.

XX. Abbandonata un' ipotesi non accettata dalla Natura, consideriamo variabile sì, ma sempre finita la forza tendente *P*. Se le saette sien minime, la formola $\frac{2 P s}{L} = f$ m' insegna, che prese come costanti la forza estrinseca *f*, e la lunghezza *L* della fibra, le saette *s* staranno reciprocamente come le forze tendenti *P*.

Supponendo infinite le saette, si verifica l' equazione $\frac{2 P + b . s}{L} = f$, da cui possiamo ricavare, ch' essendo date le quantità *b*, *f*, *L*, le saette *s* abbracciano la ragione inversa della

la somma della doppia forza tendente P, e della rigidità b. In tale circostanza meno crescono, o calano le saette di quello, che al contrario calino, o crescano le forze tendenti.

Le saette frattanto, per cui si ripiegano le fibre, s' accostano molto più al minimo, che all' infinito, e perciò quasi colla stessa proporzione, onde si minorano, o s'aumentano le tensioni, tutto a rovescio s' aumentano, o si minorano le saette. Quindi fondatamente ho asserito al numero XVIII. che quel fastidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di sanità, dipende principalmente dallo sminuimento della forza tendente.

Se la tensione s' ingrandisse smoderatamente (messo da parte il danno, che potrebbe patir la fibra) l' impressione, della forza f scemerebbe talmente, che o fievolissime, o nulle si risveglierebbero le sensazioni nell' anima.

Non tralascio d' avvertire, che se alquanto meno crescono, o calano le saette di quello, che al contrario calano, o crescono le tensioni, egli è tutto frutto della rigidità delle fibre, tolta di mezzo la quale svanirebbe nella equazione

$\frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2} = f$ il termine $\frac{bs^3}{L^3 + Ls^2}$, e le saette seguirebbero esattamente la proporzione reciproca delle forze tendenti.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due corde ugualmente lunghe, e di pari massa stanno inversamente come le radici delle forze tendenti. Perciò se decrescerà notabilmente la tensione delle fibre, oscilleranno queste più lentamente. Da un tale principio penso, che proceda quella languidezza, che si osserva negli occhi de' moribondi.

XXII. Posto che le fibre sieno simili, tese da forze proporzionali alle loro basi, composte di materia egualmente rigida, e fornite di massa proporzionale a quella degli organi, a cui devono partecipare il moto, l' elemento della varia lunghezza nulla influisce nella vivacità delle sensazioni. Le masse delle nostre fibre si corrispondono nella proporzione dei cubi delle lunghezze, le superficie e le basi nella proporzion dei quadrati. Ed atteso che le tensioni P, e le rigidità b stanno come le basi, ne se-

gue, che da loro la ragione dei quadrati L^2 delle lunghezze viene abbracciata. Nella stessa proporzione si riferiscono parimente le forze esterne; imperciocchè a misura delle superficie ricevono le fibre l' impressione dagli oggetti.

Ciò premesso, dico che le saette serbano la ragione delle lunghezze. In grazia della semplicità mi servo d' una dimostrazione indiretta. Sia dunque $s = nL$, cioè le saette come le lunghezze, e sostituito questo valore nella formola

$$\frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2} = f,$$ troveremo $$2n.P + \frac{n^3}{1+n^2}.b = f:$$ ma

i coefficienti $2n$, $\frac{n^3}{1+n^2}$ sono quantità costanti, e tanto le tensioni P, quanto le rigidità b stanno come L^2: dunque f come L^2; conseguenza che va d' accordo col vero.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle nostre fibre, anche per saette, che non sien minime, accettano la ragione delle lunghezze d' esse fibre, e si caverebbe poscia la conseguenza, che sendo i tempi proporzionali agli spazj, che si scorrono, e crescendo, o calando le velocità con pari legge, si trovano queste uguali in siti analoghi; dimodochè le forze vive delle fibre seguitano la proporzione delle loro masse. Ora dovendosi comunicare il moto ad organi, la cui massa è proporzionale a quella delle fibre, acquisteranno essi pari velocità, alle quali corrisponderanno sensazioni egualmente spiritose.

XXIII. Se le stabilite misure delle forze stiranti, e delle rigidità si suppongano variate, vagliono le stesse conseguenze per me dedotte, mentre ho trattato delle fibre di eguale massa e lunghezza, ma diversamente rigide e tese. Fatta la riflessione, che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde constano le fibre degli adulti; si conchiuderà, che le sensazioni dei primi sono più vive di quelle dei secondi.

XXIV. Ne risulterebbero sensazioni diversamente vivaci, quando le masse delle fibre simili, rigide, e tese proporzionatamente, non si corrispondessero come le masse degli organi, a

cui

cui deve passare il tremito. Le fibre di maggiore, o minore massa relativa sveglierebbero più, o meno brillanti le sensazioni.

XXV. Resta ch' io dica qualche cosa delle fibre dissimili. Consistendo la dissomiglianza nelle basi o troppo grandi, o troppo picciole, le quali hanno luogo nella determinazione della rigidità; egli è facile lo stabilire la proporzione delle forze estrinseche, e delle saette. Bisognerebbe poscia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colle masse degli organi, ai quali deggiono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l' energia delle sensazioni. Frattanto mi conterrò di notare col Conte Jacopo mio Padre, che in quella guisa, che negli uomini di rado si trovano due volti affatto simili, si dee credere, che per lo più le loro fibre sieno di differente struttura, e che ognuno abbia al pari della fisonomia le sue particolari sensazioni.

XXVI. Esaminata quanto basta la proporzione fra le forze f e le saette s, metto al paragone colle medesime forze le distensioni l, ch' esse producono nelle fibre, e ne deduco poscia alquante importanti fisiche conseguenze.

Determinare la relazione tra le forze applicate a squadra al punto medio d' una fibra, e le distensioni, ch' esse nella detta fibra cagionano.

Per la formola (4) abbiamo $\frac{2Ps}{L^2} + \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2} = f$: ma per la (3) $L + l = \sqrt{L^2 + s^2}$, o sia $2Ll + l^2 = s^2$; dunque sostituito in cambio di s il suo valore, ne risulta

$$\frac{2P}{L}\cdot\sqrt{2Ll + l^2} + \frac{b\cdot\overline{2Ll + l^2}^{\frac{3}{2}}}{L\cdot\overline{L + l}^2} = f \quad (7),$$

equazione, che determina la proporzione cercata fra gli allungamenti l, e le forze f, dalle quali sono prodotti.

Ripetuta la curva CHE (*Fig.* 13), le cui coordinate $CD=s$, $DH=f$, all' asse CF si descriva l' iperbola equilatera CIQ della equazione $2Ll+l^2=s^2$, in cui a $CD=s$ corrisponde $DI=l$, e ne seguirà che dalle forze $DH=f$ verranno operate le distensioni $DI=l$.

XXVII. Sin tanto che la forza f non esce dal confine delle quantità infinitesime, cancellati nella formola (7) i termini rispettivamente minimi, prende la stessa il seguente aspetto

$\frac{2P}{L}\sqrt{2Ll}=f$, ovvero $l=\frac{Lf^2}{8P^2}$, e ci mostra a dito essere in tale circostanza l' allungamento l della metà della fibra in ragione composta, diretta della lunghezza costante L, e del quadrato f^2 della forza variabile, che di traverso stimola la fibra intera, ed inversa del quadrato P^2 del peso, o forza tendente, che altresì si considera come costante. Supponendosi finito il coefficiente $\frac{L}{8P^2}$, alla forza minima f corrisponde la distensione l minima del secondo ordine siccome quella, che ha una proporzione finita con f^2, e perciò rispettivamente nulla dee riputarsi. E poichè nella formola non c' entra la rigidità naturale b, la stessa forza in due fibre differenti solo nella rigidità naturale produrrà la medesima distensione. Se in due fibre sia costante la frazione $\frac{L}{P^2}$ cioè a dire se i quadrati dei pesi, o delle forze stiranti seguitino la ragione delle lunghezze, le distensioni staranno come i quadrati delle forze normali alle dette fibre.

L' ipotesi della forza f infinita modifica così la formola (7) $\frac{2P+b}{L}.\ l=f$, o nella equivalente maniera $l=\frac{Lf}{2P+b}$, e determina l' allungamento l in proporzione composta, diretta della lunghezza data L, e della forza variabile f, ed inversa della somma parimente data della doppia forza tendente $2P$, e della

della rigidità b conveniente alla fibra, mentre ſi trova nella poſitura AGB (*Fig.* 9.). Giacchè il coefficiente $\frac{L}{2P+b}$ ſi ſuppone finito, la diſtenſione l, e la forza f ſaranno infinite dello ſteſſo grado, e nella ſteſſa fibra, o in fibre diverſe, quando $L : 2P+b$ ſi riferiſca nella medeſima proporzione, le diſtenſioni abbraccieranno la ragione delle forze, che le producono. Che ſe due fibre non differiranno ſalvo che nella forza tendente, o nella rigidità naturale; più creſcerà, o calerà uno di queſti elementi di quello, che al contrario calino, o creſcano gli allungamenti.

XXVIII. Paſſando dal geometrico al fiſico, le diſtenſioni finite della medeſima fibra ſi riferiranno in una ragione media fra la duplicata, e la ſemplice delle forze parimente finite, onde traggon l' origine. Poſto che le forze ſieno minime fiſicamente, le diſtenſioni accetteranno con fiſica adequazione la proporzione duplicata delle mentovate forze, la quale in fibre diverſe nulla verrà turbata dalla naturale rigidità b, purchè queſta non ſia tanto grande, che impediſca il traſcurare nella formola (7) il termine $\frac{b\,.\,\overline{2Ll+l^2}^{\frac{3}{2}}}{L\,.\,\overline{L+l}^{2}}$.

Aumentandoſi notabilmente le forze, le diſtenſioni ſi allontaneranno dalla ragione duplicata, e ſi accoſteranno alla ſemplice delle forze ſuddette. In tali circoſtanze l' elemento della rigidità naturale non potrà traſandarſi, creſcendo eſſa per altro, o ſcemando aſſai più di quello, che all' oppoſto ſcemino, o creſcano le diſtenſioni.

Eccettuata la forza tendente P, ſia tutto il reſto pari, e giacchè in riguardo alle forze minime $l = \frac{Lf^2}{8P^2}$, ed in riguardo alle maſſime $l = \frac{Lf}{2P+b}$, ed in oltre le diſtenſioni fiſiche delle fibre aſſai più ſi accoſtano al minimo che al maſſimo; ſi corriſponderanno eſſe in una proporzione più rimota della inverſa delle forze ſtiranti.

Nella

Nella formola (7) si ponga l' allungamento l proporzionale alla lunghezza L della fibra, cioè a dire $l = nL$, e si troverà $f = 2P\sqrt{2n+n^2} + \frac{b.(2n+n^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+n)^2}$. Egli è d' uopo adunque, che le forze sieno fornite di tali grandezze, se nella ragione delle lunghezze hanno da corrispondersi le distensioni. Che se in due fibre la forza tendente P, e la rigidità b saranno pari, l' omogeneo di comparazione avrà un valore costante, e la stessa forza o minima, o finita, o infinita produrrà in esse fibre distensioni proporzionali alle lunghezze.

XXIX. Deduco ora alcune fisiche conseguenze. Sin che le forze minime f hanno una picciola ragione alla forza tendente P, ed alla rigidità naturale b, le distensioni l stanno adequatamente come f^2, ed essendo quasi trascurabili rispettivamente ad L, la fibra oscilla senza notabile alterazione della sua lunghezza.

Da un allungamento insensibile si fa transito facilmente ad un altro, di cui l' anima si possa accorgere; imperciocchè gli allungamenti piccioli crescono in una proporzione, che si avvicina assaissimo alla duplicata delle forze f.

Potrebbe frattanto ben presto la distensione divenir troppo grande, se seguitasse ad aver luogo la legge testè nominata; ma cangiandosi essa, ed accostandosi a poco a poco le distensioni alla ragione semplice delle forze, gli allungamenti si aumentano più lentamente.

XXX. La determinazione congrua della forza tendente P, e della rigidità naturale b giova moltissimo per trattenere le distensioni l dentro certi discreti limiti, onde per un verso le palpitazioni delle parti minime componenti la fibra non riescano troppo fiacche, languide, e senza spirito, e per l' altro troppo violente.

Si rompe la fibra qualora la sua tenacità viene superata dalla forza tendente. Ho notato nello Schediasma I. al numero XX. essere in una corda due cose diverse la rigidità che ripugna alle distensioni, e la tenacità che ne impedisce il rompimen-

mento fino ad un certo segno. In fatti si è per me nel citato luogo determinato, che in una corda d'ottone la rigidità naturale equivaleva a libre $1124\frac{1}{2}$, e la tenacità a libre 12 a un di presso. Quantunque al crescere della forza tendente P cali la distensione l, e come vedremo al numero XXXVII. l'aumento di tensione p cagionato dalla forza f; nulladimeno se P troppo si avvicina al valore della tenacità della fibra, la forza f può romperla.

Più ancora dannosa riuscirà la soverchia grandezza della rigidità b. La forza f, che non sia minima, produce in una corda più rigida distensione minore, e non pertanto mostrerò al numero XXXVI. che l'accrescimento di tensione è più grande. Quindi la stessa forza innocente rispettivamente alle fibre di un uomo adulto, e che risveglia una viva sensazione, può divenire pregiudiziale in riguardo alle fibre troppo rigide d'un vecchio, benchè ad essa una sensazione debole corrisponda.

Non giova tampoco, che la tensione, e la rigidità pecchino nel difetto; imperciocchè (messa per ora da parte la maggior fatica dell'organo, traente l'origine dallo scemamento della forza tendente, di cui al numero XXXVII. terrò discorso) le distensioni effettuate dalla forza f si aumentano soverchio, e ne nascono sensazioni analoghe al suono grave, che rende una corda troppo sottile, e poco tesa, ch'è quanto a dire senza corpo, e snervate.

XXXI. Ho detto al fine del numero XXVIII. che se in due fibre la tensione P, e la rigidità b saranno pari, la stessa forza f produrrà distensioni in ragione delle lunghezze. Suppongansi queste due fibre ugualmente grosse, e l'urto, che riceveranno dall'obbietto esterno, riuscirà alle lunghezze proporzionale; laonde le forze f staranno come le lunghezze. Quindi la fibra più lunga verrà a proporzione più allungata della fibra più corta, e correrà maggior pericolo di restar danneggiata.

Ripiglio per mano la formola del numero XXVIII.

$$f=2P\sqrt{2n+n^2}+\frac{b.\overline{2n+n^2}^{\frac{3}{2}}}{\overline{1+n}^2}$$, che determina i valori delle

le forze f atte a produrre le diftenfioni in proporzione delle lunghezze, ed offervo che fe due fibre fimili fieno tefe da forze proporzionali alle loro bafi, e compofte di materia egualmente rigida, ftaranno P, ed b come L^2: ma parimente l' impreffione dell' obbietto efterno, che fegue la proporzione delle fuperficie, è relativa ad L^2; dunque lo fteffo obbietto in due fibre fimili, dotate delle defcritte condizioni cagionerà allungamenti in ragione delle lunghezze. E conciofiachè in tali fibre alle forze f proporzionali ad L^2 corrifpondano, conforme vedremo al numero XXXVIII., accrefcimenti di tenfione altresì come L^2, ed anche le loro tenacità (fupponendofi la materia, onde fono formate, ugualmente tenace) fi riguardino nella medefima ragione; ne fegue che un dato oggetto o recherà danno ad amendue le fibre, o a neffuna. Per la qual cofa fapientemente ha la Natura ordinato, che nei fanciulli le fibre crefcano e in lunghezza, e in groffezza, effendo troppo efpofte a ricevere detrimento le fibre foverchiamente lunghe, e fottili.

XXXII. Mi accingo prefentemente a porre al confronto le forze f cogli accrefcimenti di tenfione p, ch' effe cagionano nelle fibre. Gioverà quefto paragone per indagare la fatica, che foffre l' organo, la quale fta in ragione compofta, diretta delle aumentazioni di tenfione p, ed inverfa delle forze P dei mufcoli ftiranti le fibre, cioè a dire come $\frac{p}{P}$.

Trovare la relazione tra le forze applicate a fquadra al punto medio d' una fibra, e gli accrefcimenti di tenfione, ch' effe nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva CHEh (*Fig.* 14), le cui affiffe CD $=s$, e le ordinate DH$=f$, tiro a fquadra di CD, e parallela a DH la linea CB$=L$. Conduco pofcia la diagonale BD, e fegnata CN$=\frac{1}{2}$ DH$=\frac{1}{2}f$, defcrivo NO parallela a DB. Nella HD prorogata taglio DI$=$NO, e pel punto

I, e

I, e per altri similmente determinati fatta passare la curva M I i; dico che l' ordinata D I esprime l' intera tensione $P+p$, che patisce la corda CB, dopochè la forza DH ha in essa operato la saetta CD, e che per conseguenza sottratta $DR=P$, e delineata MRr parallela a CD, il residuo RI s' eguaglia all' accrescimento di tensione p causato nella mentovata corda dalla forza DH.

Dai triangoli simili CBD, CNO si ricava l' analogia

$$CD : DB :: CN = \frac{1}{2} DH : NO = DI,$$

$$s : L+l :: \frac{1}{2} f : \frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s},$$ che ci addita il valore di $DI = \frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s}$: ma per l' equazione (2) contenuta nel numero II. $\frac{\overline{P+p} . s}{L+l} = \frac{1}{2} f$, o sia $\frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s} = P+p$; dunque $DI = P+p$.

XXXIII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando si eguagliano a nulla la forza DH, e la saetta CD, è nullo parimente l' accrescimento di tensione RI, e perciò la nostra curva passa pel punto M.

In grazia delle conseguenze stimo opportuno di porre sotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non si contengono salvo che le due incognite f, p. Nell' ultima equazione si collochi in cambio di s il suo valore $\sqrt{2Ll+l^2}$, onde s' abbia $\frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{\sqrt{2Ll+l^2}} = P+p$. Maneggiata questa a dovere, si troverà

$$L+l = \frac{L . \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4} f^2}}$$ (8). Una tale espressione di $L+l$ si

fostituisca nella formola (1) $\frac{1}{2}\overline{b+P}.\frac{\overline{L+l}}{L}-\frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}=P+p$, della quale ho fatto uso nel numero II., e ne risulterà

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{b+P}.\overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}}-\frac{\frac{1}{2}b.\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{2}f^2}}{P+p}=P+p,$$

ed adempiuti i necessarj calcoli, $P+\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}=\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}=$ CO (9).

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla formola la specie L, la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare l' accrescimento di tensione p, il quale, sendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Ho detto per se stessa; perchè, conforme si è veduto nel numero XXII., la lunghezza delle fibre c' entra nello stabilire la misura della forza esteriore f.

Quando è minima la forza f, si trova $\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}=P+p-\frac{\frac{1}{8}f^2}{P+p}$. Avremo per tanto $P+\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}=P+p-\frac{\frac{1}{8}f^2}{P+p}$, o sia $\frac{\overline{b+P+p}}{8.\overline{P+p}^2}.f^2=p$, e cancellate le quantità rispettivamente nulle, $\frac{\overline{b+P}}{8P^2}.f^2=\frac{\overline{b+p}.s^2}{2L^2}=p$. Supponendosi data la grandezza $\frac{b+P}{8P^2}$, ne segue che le aumentazioni di tensione p stanno come i quadrati f^2 delle forze minime, onde ven-

vengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degl' infinitamente piccioli.

Abbiamo avvertito al numero XII. essere la forza infinitesima $f = \frac{2Ps}{L}$, e quindi ne dedurremo $\frac{\overline{b+P}.f^2}{8P^2} = \frac{\overline{b+P}.s^2}{2L} = p$. Impariamo da questa formola, che a CD $= s$ minima corrisponde RI $= p$ infinitesima del secondo grado, che la linea MR tocca la curva MI i nel punto M, e che la detta curva verrebbe combacciata nel nominato punto da una parabola Apolloniana, il cui vertice M, ed il parametro $\frac{2L^2}{b+P}$.

Immaginiamoci infinita la forzà f, e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso CD $= s$ uguaglia adequatamente DB $= L + l$, non altrimenti CN $=$ NO, ovvero analiticamente $\frac{1}{2}f = P + p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile P, $\frac{1}{2}f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione p come le forze infinite f, da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{1}{2}f$ non resta in conto alcuno alterato dalla diversa misura della rigidità b, e della forza tendente P.

Nella supposizione, che abbiam per le mani, è CO $= \frac{1}{2}b + P$. E vaglia il vero; pongasi in vece di $P + p$ il suo valore $\frac{1}{2}f$ nella formola (9) CO $= P + \frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}$, e ne proverrà CO $= P + \frac{1}{2}b$, conforme si dovea ritrovare.

L' analogia CB : CD :: CO : CN

$L : s :: P + \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}f$ somministra l' equazione sopra scoperta nel numero XII. conveniente alle for-

ze infinite $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b.s}}{L} = \frac{1}{2}f$. Sostituito in cambio di $\frac{1}{2}f$ il suo valore $P+p$, ci si presenta $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b.s}}{L} = P+p$; espressione da cui si raccoglie, che segnata $FQ = \frac{FK}{2} = P + \frac{1}{2}b$, e congiunti i punti C, Q con una linea, che si continui all' infinito, servirà questa d' assintoto alla curva MIi.

XXXIV. Avendo osservato che posta f minima, la tensione aggiunta p è immensamente più picciola, e che divenendo f infinita $p = \frac{1}{2}f$, ne dedurremo, che, stando nei confini del finito, l' accrescimento di tensione p è sempre minore della metà della forza f. Operando le forze esteriori di traverso, s' accresce la tensione per la quantità p, che, quando le fibre non restano molestate, è assaissimo minore di f, e che, mentre f sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artificio si mettono le fibre in una agitazione spiritosa, atta a risvegliare nell' anima le sensazioni, con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXXV. Conciossiachè in un caso estremo sta p come f^2, e nell' altro p come f, s' inferisca che più crescono, o scemano le aumentazioni di tensione p di quello, che parimente crescano o scemino le forze finite trasversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarsi. E primieramente aumentandosi la forza esteriore, cresce e con maggior proporzione la fatica dell' organo, e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l' organo facilmente si stanca. L' assidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d' uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Agevolmente si passa dall' insensibile al sensibile, o a rovescio; dal piacevole al disgustoso, o a rovescio. All' accrescimento di tensione p non corrisponda sensazione. Se per eccitarla

la faccia bisogno l' ingrandimento di tensione $4p$, si otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale f pochissimo più del doppio.

Nell' organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani, o volgendo altrove la faccia, si difende dall' empito d' una luce troppo violenta, la Natura si serve di una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all' insensibile, dal grato all' ingrato. Consiste questa nel potersi allargare, o ristringere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i ristringimenti si osservano grandissimi in quegli animali, che sono destinati a vederci di giorno, e di notte. Se il lume infiacchisce, si allarga assai la pupilla, e molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quantità. Accrescendosi il vigore della luce, si ristringe la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avranno forse degli equivalenti artificj, che non ci sono per anco noti.

XXXVI. Mi faccio adesso a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità b delle fibre nella fatica degli organi, la quale, supponendosi costante la forza tendente P, serba la ragione degli accrescimenti di stiramento p.

La formola propria delle forze minime $\frac{\overline{b+P}.f^2}{8P^2}=p$ ci manifesta, che assumendosi siccome dato il coefficiente $\frac{f^2}{8P^2}$, le aumentazioni di tensione p, mentre la forza f sia picciolissima, stanno come la somma $b+P$ della rigidità, e della forza stirante. In tale circostanza dunque la fatica dell' organo si aumenta, o si minora proporzionatamente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

Si è già avvertito al numero XXXIII., che sendo infinita la forza f, la varia rigidità b delle fibre nulla influisce nella misura dell' aumento di tensione $p=\frac{1}{2}f$.

Quindi una forza finita cagionerà incrementi di tensione, che all' ingrandire, o all' impicciolire della rigidità si troveranno meno diversi di ciò, che richiede la legge delle forze minime.

Dal-

Dalle premesse verità si desume la ragione, per cui un adulto più d' un giovane, ed un vecchio più d' un adulto è soggetto a stancarsi. Un adulto per modo di esempio non durerà tanto a leggere quanto un giovane, nè un vecchio quanto un adulto.

Per risparmiare frattanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minori di quelli della rigidità.

XXXVII. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dall' alterazione della forza tendente P.

Impariamo dalla formola spettante alle forze infinitamente picciole $\frac{\overline{b+P}.f^2}{8P^2}=p$, che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con proporzione più rimota di quella, onde al contrario calano, o crescono le forze tendenti P. In fatti se b variasse nella stessa ragione di P, si troverebbe $\frac{b+P}{8P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e l' accrescimento di tensione p starebbe inversamente come la forza stirante P. Ma supponendosi la rigidità b costante, ne segue, che se cala la forza tendente P, la somma $b+P$ è proporzionatamente maggiore di P, e se la detta forza ingrandisce, la quantità $b+P$ è a proporzione minore di P. Perciò rettamente ho asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondono in una relazione più lontana della reciproca delle forze tendenti. E giacchè la fatica dell' organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiuda, che sendo minima la forza esteriore, più si aumenta, o si minora la fatica dell' organo di quello ricerca la ragione inversa duplicata delle forze tendenti.

Mi rivolgo all' opposto limite della forza infinita f, e presupposto che questa non patisca alterazione, trovo costante l' incremento di tensione $p=\frac{1}{2}f$. Per la qual cosa la fatica dell' organo $\frac{p}{P}$ serberà la ragione reciproca delle forze tendenti P.

Quin-

Quindi possiamo sicuramente affermare, che quando è finita la forza f, la fatica dell' organo prende regola da una proporzione più lontana della inversa delle forze stiranti.

Ora si capirà la ragione, per cui alle donne infievolite dal parto recente, nelle quali si è scemata la tensione delle fibre, cagioni stanchezza, e fastidio la forza quantunque moderata del lume, del suono, e degli odori. Gioverà parimente a colore, che si fanno cavar sangue, il riparare gli occhi dalla luce soverchia, potendo questa produrre nelle fibre meno tese dell' organo della vista una impressione troppo grande, e nociva.

XXXVIII. Conchiuderò questo Schediasma coll' indagare, se la varia lunghezza delle fibre rechi modificazione veruna alla fatica degli organi.

Posto che le fibre sieno simili di figura, stirate da forze proporzionali alle loro basi, formate di materia egualmente rigida; le forze tendenti P, le rigidità b, e le impressioni f delle forze estrinseche stanno come L^2. Aggiungo, che ancora gli accrescimenti p di tensione abbracciano la medesima ragione. Mi servo in questo luogo altresì, come altrove ho praticato, d' una dimostrazione indiretta. Supposti b, f, e $P+p$ come L^2, cerco la proporzione di P, e trovandola anch' essa come L^2, inferisco che se P serberà la ragione di L^2, verrà parimente questa accettata da $P+p$, e conseguentemente ancora da p. Presa per mano la formola generale (9) $P + \frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$, osservo che nell' addotta supposizione ciascun dei due termini $\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}$, $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ sta come L^2, e perciò P, che s' eguaglia alla differenza dei termini stessi, si scopre proporzionale ad L^2.

Venendo la fatica dell' organo dinotata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed

ed essendo nel nostro caso tanto il numeratore, quanto il denominatore come L^2; si raccoglie, che gli organi e grandi, e piccioli forniti delle descritte proprietà sosterebbero pari fatica.

XXXIX. Che se le forze tendenti, e le rigidità non si corrispondessero nella ragione delle basi delle fibre simili; si verificano le medesime conseguenze, che ho ricavate trattando delle fibre ugualmente lunghe, ma diversamente rigide, e tese. Essendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, si capisce il perchè l' organo per esempio della vista si stanchi più facilmente in questi, che in quelli.

XXXX. Rispettivamente a due fibre varie solo nella lunghezza, l' impressione f delle forze esterne sta come L. Le cose dette nel numero XXXV. ci ammoniscono, che gli accrescimenti p di tensione proporzionali alla fatica $\frac{p}{P}$ del sensorio, nella presente supposizione di P costante, abbracciano una ragione media tra f^2, ed f: ma le forze f serbano la relazione delle lunghezze L; dunque la fatica dell' organo seguita una proporzione di mezzo fra L^2, ed L.

Per la qual cosa paragonati insieme due sensorj composti di fibre del pari grosse, rigide, e tese, e diverse solamente nella lunghezza, quello sosterrà maggiore fatica, che sarà fornito di fibre più lunghe.

Finisco colla riflessione, che dipendendo la fatica dell' organo dalla combinazione di più elementi, non ci dobbiamo maravigliare, se l' azione del medesimo obbietto esterno affatichi diversamente gli organi d' uomini quantunque sani, e che nel fiore dell' età si ritrovano.

SCHE-

SCHEDIASMA IV.

Delle Vibrazioni delle Corde sonore.

I. I Più usitati stromenti musici sono tutti formati di corde solide, o fluide, di minugia, di metallo, d' aria, la quale è il corpo, che suona negli stromenti da fiato. Nè questa scelta è senza la sua ragione; imperciocchè col suono predominante d' una corda espresso dalla unità sono incorporati, come vedremo, i suoni 2, 3, 4, 5, 6 &c., che al principale si riferiscono nelle proporzioni fra tutte le più semplici. Gli altri corpi sonori accoppiano insieme suoni, che avendo tra loro stranissime relazioni, non possono, quantunque coperti dal principale, interamente appagare l' orecchio. Essendo adunque le corde più di qualsivoglia altro corpo adattate alla musica, ad esse rivolgo le mie riflessioni, e delle loro vibrazioni, e primieramente di quelle delle corde solide cercando le leggi, do principio dallo scioglimento del seguente problema.

Determinare la curva, alla quale si accomoda una corda tesa, che si vibra.

II. Suppongasi AFB (*Fig.* 15) la curva cercata. Sia $BH = x$, $HK = dx$, $HD = y$, $GE = dy$, $DE = ds$, ed $ID = IE = r$ raggio osculatore. Condotte le minime tangenti DP, EP, e compiuto il parallelogramo PN, m' insegnano i canoni delle forze composte, che la tensione P della corda ED, la qual tensione si mantiene costante, perchè suppongo minima la saetta CF, sta alla forza f, che la spinge per la direzione PN, come DP: PN: ma

DP : PN :: ID : DE; dunque analiticamente

$P : f :: r : ds$, e conseguentemente

$f = \frac{P\,ds}{r}$ si è quella forza, che sollecita la particola DE per la direzione PI, la quale, supponendosi conforme ho detto la saetta CF infinitamente picciola, è adequatamente la stessa colla direzione DH.

Dinoti M la massa della corda intera, L la sua lunghezza, e si troverà la massa della nostra particella DE uguale

 ad

ad $\frac{M\,ds}{L}$. Se divideremo per detta massa la forza sollecitante $f = \frac{P\,ds}{r}$, ne risulterà la forza acceleratrice per la nominata direzione uguale ad $\frac{LP}{Mr}$. Fatta la riflessione, che se tutti i punti della corda hanno da pervenire alla linea retta ACB nel tempo stesso, le forze acceleratrici debbono serbar la ragione delle ordinate $HD = y$; ci accorgeremo d' essere giunti all' equazione $\frac{LP}{Mr} = \frac{y}{a}$, o sia $\frac{LaP}{My} = r$, da cui ci viene mostrata a dito la proprietà essenziale della nostra curva, che i raggi osculatori stanno in ragione inversa delle ordinate, e per conseguenza ancora delle forze acceleratrici. (a)

III. Prendo il seguente metodo dal P. Vincenzo Riccati mio Fratello (b), per determinare con semplicità la misura del raggio osculatore r. Si tagli $DL = a$, e dal punto L conducasi LM normale ad ID, la quale taglierà EK continuata nel punto O. Giacchè LM interseca ad angolo retto il raggio combacciante ID, sarà parallela a DE, e quindi $EO = DL = a$. Pel punto O si delinei OT normale al raggio IE, la quale incontrerà nel punto V l' altro raggio ID. Chiamata $DM = q$, sarà $MV = dq$.

Per la similitudine dei triangoli EGD, LMD avremo EG:DE::LM:LD: ma essendo il triangolo OMV simile all' ITV, o all' IDE, sarà DE:MV::ID:OM=LM; dunque *ex æquo perturbate*
EG:MV::ID:LD, o sia analiticamente
$dy : dq :: r : a$, e perciò $r = \frac{a\,dy}{dq}$. Serbando simiglianza i due triangoli DEG, DLM, ci si presenta l'analogia DM:

(a) *Per non defraudare il primo inventore della dovuta lode, ingenuamente confesso, che fino a questo segno ho seguito il metodo tenuto dal Signor Taylor nella sua Opera* Methodus Incrementorum directa, & inversa, *pag.* 88.

(b) De principio conjungendo cum principio actionis ad determinandas proprietates motus liberi, & curvilinei.

DM : DL :: DG : DE

q : a :: dx : ds , da cui si ricava l' equazione $q=\frac{a\,dx}{ds}$.

Tolta nuovamente per mano la formola $\frac{LaP}{My}=r$, e surrogato in cambio di r il valore ritrovato $\frac{a\,dy}{dq}$, avremo $\frac{LaP}{My}=\frac{a\,dy}{dq}$, o pure $\frac{LPdq}{M}=y\,dy$, ed integrando, $\frac{LPq}{M}+g=\frac{y^2}{2}$. Si determina la costante g, riflettendo che quando l' ordinata y ha il massimo valore, e s' eguaglia a CF$=c$, la linea IP cade sopra la IF, ed unendosi i punti L, M, è DM$=q=$DL$=a$. Sostituiti questi valori nella formola generale, si tramuta così $\frac{LPa}{M}+g=\frac{c^2}{2}$, e mi somministra il valore della costante $g=\frac{c^2}{2}-\frac{LPa}{M}$. Colloco questo in cambio di g nella formola generale, ed ho l' espressione compiuta $c^2-y^2=\frac{2LP.\overline{a-q}}{M}$: ma $q=\frac{a\,dx}{ds}$; dunque $c^2-y^2=\frac{2LP}{M}.\overline{a-\frac{a\,dx}{ds}}$. Nella presente supposizione che y sia minima rispettivamente ad x, e dy rispettivamente a dx, abbiamo $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx+\frac{dy^2}{2dx}$; dunque $c^2-y^2=\frac{2LP}{M}.\overline{a-\frac{a\,dx}{dx+\frac{dy^2}{2dx}}}=\frac{aLPdy^2}{Mdx^2}$, e conseguentemente

$dx=\sqrt{\frac{aLP}{M}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, ed integrando, $x=\sqrt{\frac{aLP}{M}}\,S\,\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$.

IV. Resta che si determini il valore della costante a. Descritto col raggio CF $=c$ il circolo fQF2f2F, e prorogata DG fino in Q, si taglia l'arco fQ $=z$, il quale diviso pel raggio CF $=c$ s'eguaglia a $S\,\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, conforme fanno i Geometri. Avremo dunque $x=\sqrt{\frac{aLP}{M}}\,S\,\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=\sqrt{\frac{aLP}{M}}\cdot\frac{z}{c}$. Si verifica essere l'ordinata $y=o$, mentre l'arco z s'eguaglia al nulla, o pure ad 1, 2, 3, &c. semicircoli. Si chiamino n questi numeri o, 1, 2, 3, &c. di semicircoli, e posto il quadrante fQF $=b$; sarà $y=o$, quando l'arco z accetti uno dei valori $2nb$. Il caso di $n=o$ appartiene al punto B, in cui x, y, z pareggiano il nulla. Per tal motivo non s'è aggiunta la costante nell'ultima integrazione. Col mezzo delle altre grandezze di n si stabiliscono infiniti valori della costante a. Si osservi che mentre $x=$ BA $=L$, dev'essere $y=o$, e per conseguenza $z=2nb$. Adempiute queste sostituzioni, ci si presenterà $L=\sqrt{\frac{aLP}{M}}\cdot\frac{2nb}{c}$, formola, da cui si ricava $\frac{c^2LM}{4n^2b^2P}=a$. Fatto uso di un tal valore, troveremo finalmente $x=\frac{cL}{2nb}\,S\,\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=\frac{Lz}{2nb}$, equazione delle infinite curve, nelle quali si può ripiegare oscillando la corda AB.

V. Delineo col raggio CF $=c$ il circolo fQF2f2F, e tagliato ad arbitrio l'arco fQ $=z$, pel punto Q tiro l'indefinita QD. Faccio poi BH $=x$ eguale alla grandezza quarta proporzionale dell'analogia n . fQF2f : fQ :: BA : BH,
$2nb : z :: L : x$

e con-

e condotta HD normale a BC, taglierà essa la linea QD nel punto D spettante alla nostra curva.

VI. Se $n=1$, la corda s' adatta alla curva nella Fig. 15. delineata, e l' ordinata y ha un solo massimo valore. Se $n=2$, la corda si vibra divisa in due parti eguali AS, SB (*Fig.* 16.) separate da un punto stabile, o nodo S, e l' ordinata y ha due massimi valori CF, 2C2F, uno positivo, e l' altro negativo. Tremerà la corda divisa in tre parti eguali A2S, 2SS, SB (*Fig.* 17.), quando sia $n=3$, le quali verranno frammezzate da due punti immobili 2S, S. I massimi valori della ordinata y ascenderanno al numero di tre, due positivi, ed un negativo. Generalmente si eguaglierà ad n il numero e delle parti eguali, nelle quali si distribuisce la corda, e dei massimi valori parimente uguali della ordinata y, che saranno uno positivo, e l' altro negativo a vicenda. Il numero dei nodi s' eguaglierà ad $n-1$.

Si cavi l' importantissima conseguenza, che una corda tesa non può vibrarsi salvo che o intera, o divisa in parti eguali. Nelle vibrazioni delle corde sonore la Natura accoppia insieme questi diversi moti con mirabile meccanismo, insegnandoci alcuni esperimenti, come vedremo, che una corda si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, e ciò fino a minutissime distribuzioni.

Dalla notata proprietà, che una corda non può oscillare se non se intera, o divisa in parti eguali, deriva la spiegazione dei suoni delle due trombe, marina, e da fiato. Questi stromenti sono forniti d' una sola corda, di minugia in un caso, e d' aria nell' altro, la prima delle quali è resa idonea all' oscillazione da una forza stirante, e la seconda da una forza premente, cioè a dire dal peso dell' atmosfera. Le due trombe adunque non possono rendere altri suoni salvo che quelli, che traggono l' origine dallo vibrarsi l' unica loro corda o intera, o in parti eguali distribuita.

VII. Nel determinare la figura delle curve, a cui s' adatta la corda AB (*Fig.* 15. 16. 17. &c.), non hanno punto luogo nè la massa M della corda, nè la forza tendente P, le quali sono escluse dalla equazione $x=\frac{Lz}{2nb}$. I soli elementi atti a variare la detta figura (supposto che paragonando insieme più cor-

corde, il numero n abbia rispettivamente a tutte lo stesso valore) sono la lunghezza della corda $AB = L$, e la saetta $CF = c$, a cui sono proporzionali il quadrante $fQF = b$, e gli archi $fQ = z$ corrispondenti ad angoli eguali fCQ. Quindi se le saette sieno come le lunghezze, ne risulteranno curve simili.

Le forze acceleratrici $\frac{y}{a}$ le troveremo eguali a $\frac{4n^2 b^2 Py}{c^2 LM}$, sostituito in cambio di a il suo valore; e perciò si vede, che nella loro determinazione c' entrano quegli elementi M, P, che nulla influiscono nella figura della curva AFB.

VIII. Segnata $CX = fQF$ (*Fig. 15. 16. 17. &c.*), e condotta la linea XB, tocca questa le nostre curve nel punto B. Si chiami p la suttangente gZ, che corrisponde al punto D, o sia all' ordinata $gD = \frac{L}{2n} - x$, e per la nota formola si avrà $\overline{\frac{L}{2n} - x} \cdot \frac{dy}{dx} = p$. Sostituisco in cambio di x, e di dx i loro valori $\frac{Lz}{2nb}$, $\frac{cLdy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo dopo fatte le necessarie operazioni $\frac{\overline{b-z}\sqrt{c^2-y^2}}{c} = p$: ma rispettivamente al punto B, $fQ = z = o$, $HD = y = o$; dunque in tal caso $b = p$; cioè a dire la sottotangente CX eguale al quadrante fQF.

L' ultima formola $\frac{\overline{b-z}\sqrt{c^2-y^2}}{c} = p$ mi addita la maniera facile di condur la tangente a qualunque punto D della curva col mezzo dell' analogia $CF : QYF :: gQ : gZ$

$c : b - z :: \sqrt{c^2 - y^2} : p$,

la quale determina la sottotangente $gZ = p$.

IX. Per intero compimento della soluzione del nostro problema egli è d' uopo dimostrare, che conformata la corda AB ad una delle curve delineate nelle Fig. 15. 16. 17. &c., e cominciando poscia a vibrarsi, si adatta sempre in qualunque istan-

tante ad una curva di fimil natura; dimodochè le forze di qualfifia punto abbracciano la ragione delle diftanze dall' affe A B, o fia degli fpazj, che rimangono da percorrerfi.

Sia A F D B (*Fig.* 18.) o la curva della Fig. 15. ovvero uno de' rami delle Fig. 16. 17. &c., in cui fia difpofta la corda A F D B, e giacchè le forze del punto medio F, e di qualfivoglia altro punto D ftanno come le diftanze $FC=c$, $DH=y$, produrranno in tempo minimo velocità proporzionali alle fteffe diftanze, colle quali i punti F, D fcorreranno gli fpazj Ff, Dd, che fi riguarderanno nella medefima ragione. Quindi gli fpazj refidui fC, dH fi fcopriranno effere come i totali FC, DH, e perciò pofto $fC=kc$, farà $dH=ky$, e la fua differenza $=kdy$: ma pel numero IV. $dx=\frac{cL}{2nb}\cdot\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$; dunque avremo altresì $dx=\frac{kcL}{2nkb}\cdot\frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}$, equazione della curva AfdB della fteffa natura di quella della curva A F D B.

Dal numero VII. fi raccoglie, che uguagliandofi le forze acceleratrici dei punti F, D alle grandezze $\frac{4n^2b^2Pc}{c^2LM}$, $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$, le forze dei punti f, d pareggeranno le quantità $\frac{4n^2k^2b^2P.kc}{k^2c^2LM}=\frac{4n^2b^2P.kc}{c^2LM}$, $\frac{4n^2k^2b^2P.ky}{k^2c^2LM}=\frac{4n^2b^2P.ky}{c^2LM}$, e che per confeguenza faranno le forze dei punti F, f; D, d come le relative lontananze dall' affe A B.

Nel fecondo minimo tempicello dalle forze dei punti f, d verranno generati aumenti di velocità, che ftaranno fra loro come le dette forze, ch' è quanto a dire come gli fpazj refidui da percorrerfi fC, dH, o come i totali FC, DH. Colle velocità acquiftate nei due tempicelli ambe proporzionali alle linee FC, DH fi pafferanno fpazj f2f, d2d in ragione delle

fteffe

ſteſſe linee; laonde gli ſpazj rimanenti 2fC, 2dH accetteranno la medeſima proporzione, e poſta $2fC = kc$, ſarà $2dH = ky$, ed alla curva A2f2dB competerà l' equazione $dx = \frac{kcL}{2nkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}}$.

Il numero VII. m' inſegna uguagliarſi le forze acceleratrici dei punti 2f, 2d alla coſtante $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$ moltiplicata nelle diſtanze 2fC, 2dH dall' aſſe AB, non altrimenti che quelle dei punti F, D; f, d.

Troveremo le ſteſſe conſeguenze conſiderando la figura della corda, e le forze dei ſuoi punti dopo i tempi minimi terzo, quarto, quinto &c., e finalmente conchiuderemo, che in qualunque iſtante la corda s' adatta alla curva dell' equazione $dx = \frac{kcL}{2nkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}}$, in cui a k competono ordinatamente tutti i valori, che principiano dall' unità, e vanno a terminare nel nulla, e che qualſivoglia punto D è ſempre accelerato da una forza eguale al prodotto della coſtante $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$ nella lontananza dall' aſſe AB.

X. Quantunque le corde eſempigrazia d' un gravicembalo ſi ſogliano incitare all' oſcillazione con una penna, che fa loro prendere una figura triangolare, nulladimeno non ritengono queſta figura, ma poſto, che rendano un ſuono ſolo, ben preſto ſi conformano alla curva nel numero V. determinata. Per mettere in chiaro un tal punto, egli è d' dopo provare, che ſono proporzionali alle ordinate infiniteſime DH, dH (*Fig.* 18.) le forze acceleratrici dei punti D, d appartenenti a due curve AFDB, AfdB, che abbiano l' aſſiſſa comune BH, e le dette ordinate in data proporzione come $1 : k$, onde poſta $DH = y$, ed i ſuoi elementi primo, e ſecondo dy, ddy, ſia $dH = ky$, ed i ſuoi elementi primo e ſecondo kdy, $kddy$.

Poichè (*Fig.* 15.) continuata la retta KE fino in I, le linee

nee E I, N P adequatamente parallele congiungono le linee EN, I P parallele, e proffimamente uguali, pafferà fra loro adequata uguaglianza; ed effendo $EI = -\frac{1}{2} ddy$, fi fcoprirà parimente $PN = -\frac{1}{2} ddy$: ma giufta l' offervazione fatta al numero II. $DP = \frac{1}{2} ds : PN = -\frac{1}{2} ddy :: P : f$; dunque $f = -\frac{Pddy}{ds}$, valore della forza affoluta, o follecitante, che divifo per la maffa $\frac{Mds}{L}$ dell' elemento DE della corda BD, mi fuggerifce la grandezza della forza accelerante il punto $D = -\frac{LPddy}{Mds^2}$. L' adequazione fra ds, e dx, che fi è affunta come coftante, fa vedere poterfi confiderare invariabile la quantità $\frac{LP}{Mds^2}$, e per confeguenza effere la forza acceleratrice del punto D proporzionale alla feconda differenza $= -ddy$ dell' ordinata $HD = y$. Dalle cofe non ha molto dette fi raccoglie, che le feconde differenze delle ordinate (*Fig.* 18.) HD, Hd, che fi riferifcono nella ragione data $1 : k$, abbracciano la fteffa ragione; dunque le forze acceleratrici dei punti D, d ftanno fra loro come le ordinate HD, Hd.

XI. Premeffa quefta neceffaria dimoftrazione, non abbia ancora la corda AFDB prefa la figura del numero V., ma fia talmente incurvata, che la forza, e la velocità del punto F abbia maggior proporzione alla forza, e alla velocità del punto D di quella, che paffa fra le diftanze FC, DH dall' affe AB. In un minimo tempo fi fcorreranno dai punti F, D gli fpazj Ff, Dd proporzionali alle velocità, e quindi farà Ff : Dd in maggior proporzione di FC : DH, e per confeguenza ne rifulterà fC : dH in minor proporzione di FC : DH.

Se ftaffe FC : fC :: DH : dH, ho provato che la forza in F alla forza in f fi riferirebbe nella fteffa ragione della forza in D alla forza in d. Ma effendo fC minore di quello, che la detta proporzione richiede, e diventando fempre più picciola la feconda differenza dell' ordinata fC, a cui è proporzionale la forza nel fito f, quanto più la corda AfdB s' avvicina alla linea

nea retta ACB; ne segue, che la forza in f alla forza in d avrà minor proporzione della forza in F alla forza in D.

Seguitando adunque la corda la sua vibrazione, le forze dei punti F, D s' anderanno sempre più accostando alla proporzione delle lontananze dall' asse AB, fin tanto che giunta la corda nella positura A 2 f 2 d B, le dette forze si riguarderanno nella ragione 2 f C : 2 d H, e la corda si sarà adattata alla curva del numero V.

XII. In tale circostanza egli è d' uopo provare, che altresì le velocità accettano la proporzione medesima, onde la corda conservi la figura d' una delle mentovate curve.

Sia ED un elemento della nostra corda. Al punto medio G conduco la tangente GP, la quale si confonde coll' arco ED. Movendosi i punti E, G, D per la direzione dei loro raggi osculanti, ch' è normale alla tangente GP, si girano intorno al punto P, quando le velocità sieno proporzionali alle distanze EK, GI, DH, o sia ai raggi PE, PG, PD, e descrivono archetti in ragione d' esse distanze: ed in questa supposizione il moto d' un punto nulla influisce in quello degli altri. Ma se le celerità da E verso D vanno scemando più di quello la nominata proporzione richiede, si comunica il movimento dal punto E al vicino dalla parte di D, e così da punto a punto contiguo, fino a che tutti i punti dell' elemento ED camminino con velocità proporzionali alle relative lontananze dall' asse A B. Le cose affermate dell' elemento ED s' applichino agli altri elementi della nostra corda, i punti della quale ben presto si ridurranno a vibrarsi con velocità proporzionali alle distanze dall' asse AB col mezzo della comunicazione del moto, che sarà compiuta in quell' istante, e non prima, in cui nel sito A 2 f 2 d B le forze accettano la ragione d' esse distanze.

Ed in fatti essendo sempre le forze, e per conseguenza anche le accelerazioni in tempi minimi pari fra i punti F, 2 f proporzionatamente maggiori di quelle fra i punti D, 2 d, questi eccessi di velocità si distribuiscono alle altre particole della corda, le quali solo nella positura A 2 f 2 d B sono fornite di forze, e di velocità in ragione delle relative distanze dall'asse AB.

XIII. Tralascio di prender per mano gli altri casi, come per esempio che la forza del punto F alla forza del punto D stia in maggior proporzione, e tutto all' opposto la velocità del pun-

punto F alla velocità del punto D in proporzione minore di quella, che passa fra le distanze FC, DH; perchè incitandosi al tremito la corda, conforme è consueto, o con una penna, o coll' unghia, o battendola, ha sempre luogo la prima supposizione. E vaglia il vero, nell' atto che la corda principia a vibrarsi ha la figura triangolare AFB (*Fig.* 19.), in cui il solo punto F è fornito di forza rimanendone gli altri privi, a cagione che gli elementi delle due porzioni di corda AF, FB non sono punto incurvati, e la seconda differenza di qualsivoglia ordinata HD, a cui è proporzionale la forza accelerante il punto D, si eguaglia al nulla. Comincj l' oscillazione; la mentovata forza del punto F imprime velocità al detto punto, la quale col mezzo della comunicazione del moto passa agli altri punti, dimodochè la corda un poco s' incurva, e prende la figura AfdB dotata della proprietà, che la forza, e la velocità del punto f alla forza, ed alla velocità del punto qualunque d si riferisce in proporzione maggiore di fC: dH.

Trovare il tempo impiegato da una corda tesa nel fare una vibrazione.

XIV. Concioffiachè tutti i punti della corda AFB(*Fig.* 15.) pervengano nel tempo stesso alla retta ACB, egli è indifferente il considerare il moto di qualunque punto. Scelto per esempio il punto F, sia esso giunto al sito e, e chiamata $Ce = y$, sarà la forza acceleratrice $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$. Avremo adunque per le note formole, chiamata u la velocità della particola F nel sito e, $-\frac{4n^2b^2Pydy}{c^2LM} = udu$, e passando alla integrazione, $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}\cdot\overline{c^2-y^2} = u^2$. Ho aggiunta la dovuta costante, che quando è $u = o$ nella situazione F mi dia $y = c$. Estratta la ra-

dice ci si presenta $\frac{2nb}{c}\sqrt{\frac{P.\overline{c^2-y^2}}{LM}}=u=\frac{-dy}{dt}$, e conseguentemente $dt=\sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{-cdy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$. La sommatoria di $\frac{-cdy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ s' eguaglia all' arco $FY=b-z$, e perciò troveremo integrando $t=\sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{b-z}{2nb}$, misura del tempo, in cui la particella F scorre lo spazio $Fe=c-y$.

Pervenuta che sia la minima fibra F al punto C, egli è da osservarsi, che in tal circostanza $fY=z=o$, e per conseguenza $t=\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$, tempo d' una semivibrazione del punto F, ed altresì per le cose dette, di tutta la corda AFB. Quindi $t=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$ indicherà il tempo d' una intera vibrazione della corda medesima.

XV. Ritroveremo il tempo t espresso a cagione d' esempio in secondi, paragonando la corda AFB con un pendolo a cicloide, il tempo d' una vibrazione del quale generalmente si espone per la frazione $\frac{2b}{c}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Sia b la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo, ed istituita l' analogia $t:\frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{P}}::1:\frac{2b}{c}\sqrt{b}$, scopriremo $t=\frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Pb}}$.

XVI. Confrontate insieme due corde rispettivamente alle quali il numero n abbia lo stesso valore, onde amendue si vibrino intere, o in pari numero di parti eguali distribuite, i tempi delle loro oscillazioni staranno come $\sqrt{\frac{LM}{P}}$.

Se le predette corde saranno formate della stessa materia, si chia-

si chiami d il loro diametro, e la massa M si scoprirà proporzionale ad Ld^2. Sostituita questa grandezza in cambio di M, troveremo i tempi delle vibrazioni come $\frac{Ld}{\sqrt{P}}$.

XVII. I tempi delle vibrazioni della stessa corda, che s' agita intera, o divisa in parti eguali, si corrispondono nella ragione $\frac{1}{n}$. Assegnati per tanto ad n ordinatamente i suoi valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., i mentovati tempi formeranno la serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ &c. ma i suoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari stanno inversamente come i tempi d' esse vibrazioni; dunque i suoni della medesima corda, che trema o intera, o distribuita in due, in tre, in quattro &c. parti eguali, vengono dinotati dalla serie aritmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., e tali realmente sono i suonj delle due trombe.

Non lascio d' avvertire, che la corda BS (*Fig.* 16. 17. &c.) si vibra nel medesimo tempo, e produce lo stesso suono e come parte aliquota della corda AB, e come corda solitaria, ed intera fermata immobilmente nel punto S. Sia la lunghezza BS $=l$, e la massa m, e purchè la nostra corda, come si suppone, oscilli intera, avremo $t=\frac{c}{2b}\sqrt{\frac{lm}{Pb}}$: ma $l=\frac{L}{n}$, $m=\frac{M}{n}$; dunque $t=\frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{n^2Pb}}=\frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Pb}}$, ch' è quella formola istessa, per cui si esprime il tempo d' una vibrazione della corda BS parte aliquota della corda AB. Questa verità non abbisognava di dimostrazione; imperciocchè stando immobile in amendue le circostanze il punto S, la corda BS non può indovinare da qual cagione proceda la detta immobilità, e deve in un caso, e nell' altro in pari tempo oscillare.

XVIII. Se la corda AB (*Fig.* 15.) fosse infinitamente lunga, la porzione finita BH atta a rendere qualsivoglia suono sarebbe parte aliquota della lunghezza infinita AB; e quindi

la

la mentovata corda potrebbe in se stessa ricevere qualunque suono. Le corde d' aria, col mezzo delle quali si diffonde il suono, deggiono considerarsi infinitamente lunghe; perchè continuano all' indefinito o direttamente, o col mezzo di riflessioni, e prima per opera delle replicate resistenze si estinguono le vibrazioni sonore, di quello che manchi l'aria, a cui si possano comunicare. Or ecco la ragione per cui l' aria ci porta qualsivoglia suono all' orecchio.

Io conghietturo, che organizzando l' orecchio abbia la Natura scavati nell' osso delle tempie tre canali semicircolari, ed una chiocciola, i quali insieme col vestibolo compongono la cavità, che chiamasi laberinto, acciocchè in essi racchiudasi un lungo nervo uditorio, che, facendo figura d' indefinito, possa in se ricevere qualunque suono. Il nervo uditorio, che per varj forellini aperti nel cranio in faccia alla base della staffa, e nel centro della chiocciola va speditamente al cerebro, si propaga per la cavità del labirinto; ed essendo assai molle, massimamente che il laberinto è sempre ripieno d' umore, porzioni molto picciole, e fisicamente minime della sua lunghezza corrisponderanno all' unisono esempigrazia colle corde di un gravicembalo; e poichè con fisica adequazione sono parti aliquote della totale lunghezza, possono concepire palpitazione.

Se le dette parti sieno soverchiamente minime, diverranno inflessibili, e non potranno vibrarsi. Che se il corpo sonoro determinerà queste parti troppo lunghe, non saranno fornite di rigidità sufficiente, e non porteranno all' anima suono sensibile. Proviamo tutto giorno coll' esperienza, che i più lunghi contrabbassi dell' organo producono piuttosto un fremito muto che un suono; e perciò i suoni alla nostra orecchia sensibili deggiono essere ristretti fra certi limiti di gravità, e di acutezza, che dall' accuratissimo M. Sauveur sono stati determinati.

XIX. Si potrebbe ancor sospettare, che il nervo uditorio fosse composto da un fascio di nervi, che per picciolissimi gradi passassero dal tuono più grave al più acuto, fra i quali si ponesse in tremito quello, che corrispondesse all' unisono col corpo sonoro. Fingasi che i mentovati piccioli gradi sieno la decima parte di un comma: e giacchè non solo si comunicano i suoni unisoni esattamente, ma parimente quelli, che all' unisono si avvicinano, insegnandoci l' esperienza, che una corda fa tre-

tremar l' altra accordata in semituono minore uguale a quattro comma; ne seguirebbe, che all' oscillare di un corpo sonoro si vibrerebbero oltre il nervo unisono quaranta nervi più acuti, ed altrettanti più gravi, gli estremi dei quali si corrispondereb- bero a un di presso in seconda maggiore. Si udirebbe adunque una mescolanza di suoni, che formerebbe un suono falso, ed ingrato, il che certamente non adiviene. Per la qual cosa la prima mia conghiettura riceve lume maggiore, e sempre più in- clino a credere, che intanto il nervo uditorio porti all' anima tutti i suoni dentro certi stabiliti confini, inquanto che possa far figura d' indefinito.

XX. Ho promesso ai numeri I. e VI. di recare alcuni espe- rimenti, i quali facciano toccar con mano, che a un tratto e tutta intera, e divisa in parti eguali una corda sonora si vi- bra. Intanto non s' odono senza molta attenzione i suoni del- le parti aliquote, inquanto che il suono predominante della corda intera occupa talmente l' orecchio, che non glieli la- scia così agevolmente discernere. Quello, che ho detto della cor- da intera rispettivamente alle sue parti aliquote, s' intenda al- tresì d' una parte aliquota in riguardo alle sue divisioni, e pa- rimente d' una parte aliquota messa al confronto d' un' altra notabilmente minore. Mal grado per altro la relativa fievolez- za dei suoni delle parti aliquote d' una corda, se la incitere- mo vigorosamente al tremito in poca distanza da uno scannello, sentiremo, ponendovi la dovuta attenzione, i suoni delle ter- ze, e delle quinte parti, che al suono della corda totale si ri- feriscono, quello in quinta sopra l' ottava, questo in terza maggiore sopra la doppia ottava. Difficilmente si distinguono i suoni delle metà, e delle quarte parti, che formano col suo- no fondamentale ottava semplice, e duplicata, perchè tali equi- sonanze si confondono, e per così dire s' incorporano col suono della corda intera.

Chi volesse frattanto udire belli, e distinti i suoni delle parti aliquote, lavori una molla con un pezzo di corda d' ot- tone delle più grosse, e le dia, se così gli piace, quella for- ma, che nella Fig. 20. sta espressa. Tenga questa molla nella mano sinistra, e stimolata, acciocchè si vibri, colla mano destra la corda A B (*Fig.* 15. 16. 17. &c.) a un di presso nel si- to C, prema subito colla molla uno de' punti S, 2 S, &c., e

restan-

restando con ciò ammortiti i suoni della corda intera A B, e di quelle porzioni, che non sono parti aliquote delle corde BS, S2S &c., sentirà spiritoso, e chiaro il suono delle corde or ora mentovate. Per tal mezzo si udiranno quanto basta distinti fino i suoni delle parti trentesime.

XXI. Potrebbe taluno ridire, che prima dell' accostamento della molla ad uno de' punti S, 2 S, &c. la corda A B non tremava divisa nelle parti BS, S2S, &c., essendo essa stata determinata dall' applicazione della nominata molla a sì fatta maniera di vibrazione. Rispondo, che se la pressione della molla avesse indotto la corda A B ad oscillare compartita nelle porzioni eguali BS, S2S, &c. nulla servirebbe per sentire i suoni d' esse porzioni più, o meno forti, che fosse stata da me stimolata al moto piuttosto nei siti C, 2C, 3C, &c. che nei punti S, 2S, &c. ma se la percuoto ne' primi siti, odo un suono forte, se nei secondi, l' odo debole, dunque un tal suono dall' impedimento della molla non trae l' origine. L' incitare la corda in uno de' punti S, 2S, &c. è un modo inettissimo per imprimere alle parti BS, S2S, &c. le loro particolari vibrazioni, usandosi il massimo sforzo contro uno di que' punti, che le oscillazioni delle parti mentovate vogliono stabili, e non ripiegandosi veruna d' esse parti, onde possa oscillare, e comunicare il tremito alle compagne. L' esposta verità verrà posta in tutto il suo lume dalla seguente sperienza.

S' applichi la molla per esempio al punto 2S (*Fig.* 17.) e se si stimolerà poscia la corda nel posto S, fievolissimo giungerà all' orecchio il suono delle terze parti BS, S2S, 2SA. Tutto all' opposto imprimendo il moto nei siti C, 2C, 3C, concepiscono le dette parti un suono chiaro, e robusto. Avverto, che giova al vigore del suono il battere piuttosto la corda ne' punti C, 3C, che nel punto medio 2C. La maggior vicinanza degli appoggi rende la corda più resistente, e fa sì ch' essa acquisti una più viva palpitazione.

Conchiudo, che la pressione della molla non introduce nella corda A B i suoni, che antecedentemente non c' erano, ma cagiona l' unico effetto di rendere sensibili quelli, ch' erano già stati impressi, e ciò coll' estinguere i suoni più forti della corda intera, e delle maggiori parti aliquote.

XXII. Dalla fondamental proprietà, che una corda unitamente

tamente si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, agevolmente deducesi la legge della comunicazione dei tremiti sonori da una corda all' altra. Egli è d' uopo premettere, che non si comunicano sensibilmente altre vibrazioni, che le unisone o esattamente, o prossimamente. Per ottenere, che passi notabile palpitazione dall' una all' altra corda, ci vuole una forza continuamente applicata, la cui azione sia favorevole costantemente. Due corde unisone oscillano sempre a seconda, e non si contrastano mai. Non così succede in due corde, che molto dall' unisono si discostano; imperciocchè spesse volte, mentre la corda agente oscilla, e spinge l' aria verso la paziente, questa reciproca, ed incontra perciò resistenza; ed all' opposto mentre la corda agente reciproca, la paziente oscilla, nè può essere da quella ajutata.

Date due corde, sono note le serie di suoni prodotti dalle corde stesse, secondochè tremano o intere, o divise in parti eguali. Quando i suoni delle due corde intere non si riferiscano in una proporzione assimetra, le predette corde avranno dei suoni comuni. Ora questi suoni comuni, e specialmente il più grave proprio d' una parte aliquota più lunga, e conseguentemente più flessibile, da una corda all' altra faran passaggio. Il canone generale vuol essere illustrato con un esempio. Ci sieno due corde della stessa materia ugualmente grosse, e tese con pari forza, le cui lunghezze 1, $\frac{2}{3}$. Posto che i suoni della prima si esprimano colla serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c., quelli della seconda verranno dinotati dalla progressione

$\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}=3$, $\frac{9}{2}$, $\frac{12}{2}=6$, $\frac{15}{2}$, $\frac{18}{2}=9$, &c.

Si osservino comuni alle due i suoni 3, 6, 9, &c., e si cavi la conseguenza, che tali suoni, e principalmente il più grave 3 proprio delle terze parti della corda 1, e delle metà della corda $\frac{2}{3}$, dalla corda agente alla paziente si apriranno la strada. Ella è la corda 1, che oscilla divisa in tre parti eguali, che fa suonare la corda $\frac{2}{3}$ in due porzioni eguali partita: e così pari-

mente la corda $\frac{2}{3}$, che si vibra divisa per metà, partecipa il suono alla corda 1 in tre parti eguali distribuita. Quindi parlando con precisione dobbiamo dire, che le tre corde $\frac{1}{3}$ fanno suonare le due corde $\frac{1}{3}$, o a rovescio.

XXIII. Fra le molte sperienze, colle quali si può confermare la legge da me stabilita, so scelta della seguente, che ha relazione all' esempio or ora recato. La corda A B (*Fig.* 21.), la cui lunghezza $= \frac{5}{3}$, dividasi in cinque parti eguali BS, S2S, 2S3S, 3S4S, 4SA. Al punto 2S sottopongasi lo scannello E2SD, e col corpo duro, e curvo 2SF (io mi soglio servire della testa d'un compasso) il quale tocchi la corda nell' unico sito 2S, si prema essa corda, di maniera che non possa far moto alcuno al di sopra dello scannello. Partita così la corda in due segmenti $B2S = \frac{2}{3}$, $2SA = 1$, si faccia suonare per modo d' esempio il primo, stimolandolo coll' unghia in uno de' punti C, 2C, che dividono per metà le porzioni eguali BS, S2S, ed ammortitone incontanente il suono col polpastrello del dito, si sentirà chiaramente sonare il segmento 2SA non già intero, o diviso per metà, ma in tre parti eguali distribuito 2S3S, 3S4S, 4SA. Questo suono da me nell' addotto esempio espresso pel numero 3 è il più grave fra quelli, che sono comuni ad ambe le corde B2S, 2SA, e quindi più vigoroso degli altri dalla corda agente alla paziente fa transito.

Ho detto, che la corda B2S s'inciti al tremito in uno de' punti C, 2C, perchè tali siti sono assai favorevoli alle vibrazioni della nostra corda in due porzioni eguali divisa. Per altro applicata l' unghia al punto più svantaggioso S, le due metà BS, S2S, conforme ho avvertito al numero XXI., concepiranno vibrazione, ma fiacca, la quale si comunicherà alle terze parti della corda 2SA.

XXIV. L' artificio, ch' espongo, servirà a far toccar con mano, che nel suono della corda 2SA non ha parte alcuna quello della corda intera B2S, ma che unicamente è cagionato dalle oscillazioni delle due metà BS, S2S. Cingasi il sito

to S con uno ſpago, e dopo averlo aggroppato, ſi recida lo ſpago ſteſſo in vicinanza del gruppo. Queſto ſpago ammorza il ſuono della corda intera B2S, e nulla, o poco impediſce le vibrazioni delle due metà BS, S2S. Stimolata la corda al tremito in uno de' ſiti C, 2C, ed ammortendolo poſcia col polpaſtrello del dito, reſterà il ſuono delle terze parti della corda 2SA, che s' udirà non meno forte di quello, che rende la corda ſteſſa, mentre al punto S lo ſpago non è legato. S'inferiſca per tanto, che le vibrazioni della corda intera B2S nulla influiſcono nel ſuono della corda 2SA, che oſcilla in tre parti eguali diſtribuita.

XXV. Difficiliſſima ſembra a prima viſta la ſpiegazione d' una belliſſima eſperienza del celebre Signor Giuſeppe Tartini. Stimolate coll' arco due corde del violino, i di cui ſuoni s' eſprimano con numeri fra loro primi, e purchè il più picciolo di queſti numeri non ſia eguale ad uno, s' ode ſempre in aria il nuovo ſuono denotato dalla unità. Rendano per modo d' eſempio due corde i ſuoni 3, 5, e ſi farà ſentire in aria il ſuono 1, a cui i predetti ſuoni 3, 5 ſi riferiranno, quello in quinta ſopra l'ottava, queſto in terza maggiore ſopra l'ottava duplicata. (a)

(a) Quantunque il lodaro Sig. Tartini, il quale eſprime i ſuoni, non come è mio coſtume pe' numeri delle vibrazioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. fatte in tempi eguali, ma per le loro durate 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c. affermi alla pag. 18. del ſuo trattato di Muſica, che s' ode in aria il terzo ſuono $\frac{1}{2}$: nulladimeno avviſato da me col mezzo del P. Franceſcantonio Vallotti eccellente Maeſtro di cappella nel tempio di S. Antonio di Padova, che queſto ſuonò dovea pareggiar l' unità, ſcrive alla pag. 172. *Il terzo ſuono, ch' io dico uniſono coſtantemente a* $\frac{1}{2}$, *quando i dati ſuoni ſieno in ſerie armonica, ſi può dubitare, che ſia uniſono al tutto, o ſia alla prima unità della ſerie.* Di *fatto la qualità di queſto terzo ſuono eſſendo diverſa dalla qualità del ſuono naturale delle corde, queſta diverſità può cagionare equivoco ad onta del più eſquiſito ſenſo di udito, e di migliaja di prove.* Facendo il Sig. Serre menzione della ſperienza del Sig. Tartini nella ſua opera ſopra i principj dell' armonia ci aſſicura, che i terzi ſuoni prodotti dalle terze maggiori, e minori corriſpondono all' ottava baſſa con quelli del Sig. Tartini.

Immaginiamoci tre corde BD, E, F (*Fig.* 22.), la prima infinitamente lunga, e le altre due di lunghezza determinata. Si facciano sonare le due corde finite, ed in virtù dell' azione della corda E, tremerà la corda indefinita BD divisa in porzioni eguali BS, S2S, &c. ciascuna delle quali sarà unisona alla corda E. Non altrimenti per opera della corda F oscillerà la corda BD distribuita in parti eguali BI, I2I, 2I3I, &c. che alla corda F risponderanno all' unisono. Le lunghezze delle parti BS, BI della stessa corda stanno inversamente come i loro suoni unisoni a quelli delle corde E, F: e quindi espressi tali suoni pe' numeri n, N fra loro primi, avremo $BS : BI :: \frac{1}{n} : \frac{1}{N}$, e conseguentemente ponendo $BS = \frac{L}{n}$, sarà $BI = \frac{L}{N}$. Se prenderò la lunghezza $BS = \frac{L}{n}$ tante volte BS, S2S, &c. quante unità si contengono in n, e così parimente la lunghezza $BI = \frac{L}{N}$ tante volte BI, I2I, 2I3I, &c. quante unità comprende il numero N, ne risulterà in ambo i casi la stessa lunghezza $BA = L$. Egli è facile da scoprire, che il punto A, non meno che il punto B, sta immobile in riguardo alle vibrazioni e delle parti BS, e delle parti BI, terminando in esso due porzioni di varia grandezza 2SA, 4IA.

Fra i punti B, A non si può dare altra coppia di nodi, che nello stesso punto si uniscano. Per ottenere questa unione, sarebbe d' uopo che i numeri n, N avessero una comune misura K maggiore della unità; dimodochè $\frac{n}{K}$, $\frac{N}{K}$ fossero numeri interi minori di n, N. In tale ipotesi moltiplicando $BS = \frac{L}{n}$ per $\frac{n}{K}$, $BI = \frac{L}{N}$ per $\frac{N}{K}$ ci si presenterebbe la medesima lontananza $\frac{L}{K}$ dal punto B, minore di $AB = L$; in cui seguirebbe dei due punti stabili l' accoppiamento: ma i numeri n, N, che si suppongono fra loro primi, non hanno comune misura maggiore della unità; dunque non può darsi sito alcuno fra i punti B, A, nel quale succeda l' union di due nodi. Per-

ciò

ciò non c' è punto nella corda BA, detratti gli estremi B, A, che non si vibri; imperciocchè quei punti S, 2 S, che dovrebbero rimaner immobili rispettivamente alle oscillazioni delle parti BS, S 2 S, &c. tremano per cagion delle vibrazioni delle parti BI, I 2 I, &c. e così parimente que' punti I, 2 I, &c. che i tremiti delle porzioni BI, I 2 I, &c. vorrebbero stabili, si muovono per motivo delle oscillazioni delle parti BS, S 2 S, &c.

La palpitazione di qualunque punto medio fra B, ed A fa sì, che la corda intera BA concepisce vibrazione, e rende quel suono, ch' è conveniente alla lunghezza BA. Cerchiamo il valore di questo suono, e vediamo se vada d' accordo con quello, che la sperienza del Sig. Tartini ci somministra. I suoni di due parti BS, BA della stessa corda BD serbano la ragione reciproca delle lunghezze BS, BA. Il termine quarto proporzionale adunque di $\frac{1}{BS}=\frac{n}{L}$, $\frac{1}{BA}=\frac{1}{L}$, e di n suono della porzione BS, s' eguaglierà al suono della corda BA: ma il detto quarto termine proporzionale pareggia l' unità; dunque per questa s' esprime il suono della corda BA, e tale si è il suono, che ci fa udire in aria l' esperimento del Signor Giuseppe Tartini.

XXVI. Abbiamo veduto al numero XVIII., che le corde d' aria apportatrici dei suoni si deggiono considerare infinitamente lunghe. La corda BD è uno di que' raggi sonori, che vengono dal violino al mio orecchio, lungo il quale si segnano le porzioni BS, S 2 S, &c. BI, I 2 I, &c. unisone alle corde E, F del violino. Comincia essa corda BD da quel punto B, in cui incontrandosi i due raggi EB, FB provenienti dalle due corde E, F del violino, sono obbligati dall' urto ad incamminarsi di conserva per la media direzione BD. Dall' unirsi poi due nodi nel punto A, e dallo schivarsi tutti gli altri nodi medj fra B, ed A, ne nasce il suono $=1$ della corda BA, che si sente in aria, siccome è stato da me spiegato. Si avverta che l' accoppiamento dei nodi in un solo punto si replica alle distanze 2 BA, 3 BA, &c. dal punto B; laonde la corda BD trema divisa nelle tre parti di varia misura BI, BS, BA, che rendono i suoni N, n, 1. Posto $n=1$, non nascerebbe in aria nuovo suono, e la corda BD oscillerebbe divisa nelle

sole

sole due parti BI, BS = BA unisone alle corde F, E del violino. In fatti le ragioni 1:2, 1:3, 1:4, &c. non producono il terzo suono.

XXVII. Conchiudo colla riflessione, che si spiegano cogli stessi principj due sperienze una reciproca dell' altra, cioè, che toccata una corda, si sentono i suoni delle sue parti aliquote, ed all' opposto stimolate al suono due parti aliquote, s' ode il suono della più picciola corda intera, che possa da esse parti essere misurata. Incurvata la corda tutta, s' incurvano altresì le sue parti aliquote, e fanno le loro particolari oscillazioni. Non altrimenti incurvate due parti aliquote, s' incurva parimente la corda intera minimo tutto da esse misurato, e conseguentemente si pone in oscillazione. Due suoni del violino fanno nascere in aria un suono sensibile, perchè tali suoni sono assai forti. Surrogato al violino un gravicembalo, o un mandolino, il suono in aria riesce talmente fiacco, che non fa impressione fisica nell' orecchio.

XXVIII. Proccura il dottissimo Signor Jacopo Ermanno negli Atti di Lipsia dell' anno *1716*. di trovare il tempo periodico d' una corda sonora, che si vibra, senza prima indagare la curva, alla quale si adatta la predetta corda oscillando; ed ecco il metodo, di cui si serve.

Quando la corda AB (*Fig.* 18.) tesa dalla potenza *P* acquista le curvature AFB, AfB, la sua lunghezza AB è accresciuta per le quantità AFB — AB, AfB — AB, e queste distensioni siccome minime sono proporzionali alle forze, che le producono. Quindi se (*Fig.* 18. 23.) sia AB = DP, AFB = HP, AfB = EP, e la retta HN normale ad HP esponga la forza producente la distensione HD = AFB — AB, dinoterà EO parallela ad HN la forza, che cagiona l'allungamento ED = AfB — AB.

Conducasi parallela ad HN la linea DK = *P*, potenza, che alla nostra corda somministra quel grado di tensione, o di elasticità, che ha in ACB, e segnata PKM, a cui il Signor Ermanno suppone equidistante DN, si scopriranno HM, EL uguali ai gradi assoluti di tensione, che competono alla corda nei siti AFB, AfB; e non altrimenti le altre ordinate del trapezio HDKM esporranno le tensioni assolute nelle corrispondenti posizioni della corda. Ora queste ordinate non possono uguagliarsi

gliarsi alle forze, che obbligano la corda ad accorciarsi; imperciocchè giunta nel sito ACB, ove la sua energia $=P$, non può ulteriormente scemar di lunghezza. Le sole HN, EO, &c. dinotano le forze, che l' accorciamento della corda producono. Ciò posto, immaginiamoci un corpo H, la cui massa si eguagli a quella della corda AB, il quale venga spinto per lo spazio HD dalla scala di forze HDN, e siano $AB = DP = L$, $DK = P$, la massa del mobile $H = M$, $DH = a$, $DE = x$, la velocità acquistata nella discesa per $HE = u$, il suo elemento $= du$, e l' elemento del tempo, nel quale lo spazietto Ee si percorre, $= dt$. Avremo per la similitudine dei triangoli PDK, DEO, $PD = L : DK = P :: DE = x : EO = \frac{Px}{L}$. Egli è noto che $EO . dt = \frac{Pxdt}{L} = Mdu$, e moltiplicando il tutto per Lu, $Pxudt = MLudu$: ma $udt = -dx$; dunque $-Pxdx = MLudu$, e sommando, $a^2 - x^2 = \frac{ML}{P} . u^2$, e conseguentemente $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{ML}{P}} . u$. Pongo in vece di u il suo valore $-\frac{dx}{dt}$, onde ne risulti $dt = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e fatta l' integrazione, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} S \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Descritto frattanto col centro D, e col raggio HD il quadrante HQSD, e continuata OE fino in Q, avremo $S \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{HQ}{HD}$; e perciò $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{HQ}{HD}$, e quando il mobile è pervenuto al punto D, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{HQS}{HD}$. Sia il quadrante HQS al raggio HD come $b : c$, e ne proverrà $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{b}{c}$, misura del tempo, che impiega il mobile a scorrere l' intero spazio $HD = a$.

Si faccia la riflessione, ch' essendo il mobile H, e la corda

da AB forniti della stessa massa, stimolati dalla stessa scala di forze NHD, ed accorciandosi la detta corda pel medesimo spazio, per cui si move il corpo H, spenderà essa nell' accorciarsi per lo spazio $HD = AFB - AB = a$, o sia nel fare una mezza vibrazione il tempo $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{b}{c}$, che consuma il corpo nel viaggiare per lo spazio HD, e quindi a compiere una intera vibrazione ci vorrà il tempo $t = \frac{2b}{c} \sqrt{\frac{ML}{P}}$.

XXIX. Per paragonare il moto della nostra corda con quello dei pendoli a cicloide, sia b la lunghezza d' un pendolo, che fa una vibrazione per secondo, il tempo della quale si espone per $\frac{2b}{c} \sqrt{b}$. Facciasi adunque $t : \frac{2b}{c} \sqrt{\frac{ML}{P}} :: 1 : \frac{2b}{c} \sqrt{b}$, e scopriremo $t = \sqrt{\frac{LM}{Pb}}$, formola del tempo espresso in secondi d' una vibrazione della corda AB, che non si accorda con quella, ch' è stata da me determinata nel numero XV.

XXX. La diversità delle mentovate due formole, ed il nome celebre del Signor Ermanno mi hanno obbligato ad esaminare posatamente la sua soluzione, la quale certamente è per più titoli difettosa.

E primieramente prend' egli sbaglio nel mettere a computo l' azione della elasticità della corda AFB, la quale non viene rappresentata dal solo triangolo $HDN = \frac{Pa^2}{2L}$, come vuole il Sig. Ermanno, ma bensì dal detto triangolo più il rettangolo KD. $DH = Pa$, cioè a dire dalla quantità $Pa + \frac{Pa^2}{2L}$. la quale supponendosi a minima si adegua a Pa. In fatti quando la corda dalla positura AFB passa alla linea retta, segue l' accorciamento $AFB - AB = a$, e la sua elasticità adequatamente costante, ed uguale a P si applica allo spazio $AFB - AB = a$, ed esercita l' azione Pa. Nè quì c' è alcuna reazione, che si debba sottrarre, supponendosi la nostra corda,

da, ch' è tesa dalla forza P raccomandata a due chiodi immobili A, B. Se ci fosse una corda verticale, la cui lunghezza AFB, dalla quale pendesse il peso $P+\frac{Pa}{L}$, che colla sua elasticità formasse equilibrio, levato il peso $\frac{Pa}{L}$, ed avendo la corda tirato in alto il grave P per lo spazio $=a$, la forza elastica avrebbe esercitata l' azione $Pa+\frac{Pa^2}{2L}$, da cui dovendosi sottrarre la reazione Pa del peso, resterebbe l' azione $\frac{Pa^2}{2L}$. Ma, come dissi, nel nostro caso della corda a due chiodi attaccata non si dà reazione veruna, supponendosi i chiodi immobili; laonde va introdotta nel calcolo l' azione Pa, e non la $\frac{Pa^2}{2L}$. Nè punto conchiude la ragione addotta dal Sig. Ermanno, che intanto si dee tener conto della sola differenza $\frac{Pa}{L}$ fra le elasticità della corda $P+\frac{Pa}{L}$, P nei siti AFB, ACB, inquanto giunta la corda in ACB, la sua elasticità P non può agire; imperciocchè questo non impedisce, che mentre la corda si accorcia per lo spazio AFB $-$ AB $=a$, l' elasticità P non eserciti l' azione Pa, a cui non si oppongono i chiodi, i quali solamente frastornano un' azione ulteriore.

XXXI. In secondo luogo suppone non rettamente il nostro insigne Autore parallele le due linee PM, DN. Ho dimostrato nello Schediasma I. che nell' allungamento d' una corda c' entra l' elemento della rigidità naturale, la quale consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi distendere, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente. Questa rigidità naturale corrispondente alla lunghezza PD $=L$, ed alla forza tirante DK $=P$, si chiami r, e posta la forza minima HN $=p$, mi è riuscito di scoprire l' allungamento infinitesimo DH $=a=\frac{Lp}{r+P}$, il quale se le linee PM, DN fos-

fero parallele, dovrebbe uguagliarsi alla grandezza $\frac{Lp}{P}$.

Quindi il corpo H $= M$ considerato dal Signor Ermanno, che fosse spinto per lo spazio H D dalla scala di forze N H D, non si moverebbe nel tempo da lui determinato, ma il vero tempo espresso in secondi d'una sua vibrazione sarebbe $= \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{r+P.b}}$, formola totalmente discorde da quella, che conviene alle vibrazioni trasversali delle corde sonore, i tempi delle quali (e ne vedremo il perchè al numero XXXXIII.) non vengono punto alterati dalle rigidità naturali.

Ma prescindendo anche da ciò, il corpo H, la cui massa M uguale a quella della corda, non può mai essere ad essa isocrono; perchè tutte le particole di quello si muovono per lo spazio H D $= a$; il che non si adempie degli elementi di questa. L'elemento della semicorda BF vicino al punto F con moto di accorciamento viaggia per lo spazio $\frac{1}{2}a$, e gli altri elementi, esempigrazia D E, scorrono spazj sempre minori, quanto più si accostano al punto B. Lo stesso dicasi dell'altra semicorda A F.

XXXII. Si ponga mente in terzo luogo, che il vero moto della corda A F B si è il trasversale per gli spazj F C, D H, &c., essendo, come osserveremo nel seguente numero XXXIII. il moto di accorciamento rispettivamente infinitesimo, e trascurabile. Perciò due conseguenze vogliono dedursi; cioè che agendo l'elasticità della corda per lo spazio A F B $-$ A B $= a$, e movendosi la sua massa per ispazj onninamente diversi F C, D H, &c., non poteva il Signor Ermanno senza paralogismo valersi della formola Cartesiana $fds = Mdu$, che non si verifica salvo in que' casi, ne' quali la forza agisce, ed il corpo si muove per ispazj eguali. In oltre dipendendo gli spazj F C, D H, &c., per cui si fa il vero moto, dalla curva A F B, alla quale si adatta la corda oscillando, egli è impossibile determinare il tempo d'una vibrazione indipendentemente dalla curva mentovata.

XXXIII. Ora passo ad esaminare la mia soluzione, e dimostro, che tacitamente ho in essa computata la vera azione Pa; di-

dimodochè quando la corda è giunta alla linea retta ACB (*Fig.* 15.) ha fatto acquisto di un aggregato di forze vive uguale alla detta azione. La suppofizione, che dy sia minima rispettivamente a dx, determina l' elemento $DE = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx + \frac{dy^2}{2dx}$: ma per l' equazione della curva AFB, $dx = \frac{cLdy}{2nb\sqrt{c^2 - y^2}}$; dunque $ds = dx + \frac{nbdy\sqrt{c^2 - y^2}}{cL}$, ed integrando $s = x + \frac{nb}{cL} S\sqrt{c^2 - y^2}.dy$. Tralascio la costante, perchè in questo caso non ci va aggiunta. Riflettasi essere $S\sqrt{c^2 - y^2}.dy$ eguale all' aia circolare CgQf, e quindi scopriraffi $s = x + \frac{nb}{cL}$. CgQf: ma quando $BH = x = BA = L$, l' aia CgQf è divenuta uguale al semicircolo $fQF2ff = bc$ moltiplicato per n (*Fig.* 15. 16. 17.); dunque in tal circostanza $s = AFB = AB + \frac{n^2b^2}{L}$, e l' azione $Pa = \frac{Pn^2b^2}{L}$.

E qui noti meco chi legge, che supponendosi minimi del primo ordine il raggio $FC = c$, il quadrante $FQf = b$, e le ordinate $DH = y$; la grandezza $AFB - AB = a = \frac{n^2b^2}{L}$ appartiene al secondo ordine degl' infinitesimi, e perciò il moto di accorciamento della porzione di corda BF per lo spazio $\frac{a}{2n}$ è trascurabile rispettivamente a quello per le ordinate FC, DH, &c., conforme al numero XXXII. avea promesso di far vedere.

XXXIV. Al punto F rimanga da scorrere lo spazio $gC = kc$, ed al punto D lo spazio corrispondente ky, onde, come si raccoglie dal numero XIV. la velocità del punto F sia

$= 2nb\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot\overline{1-k^2}}$, e la corrispondente del punto D $= \frac{2nby}{c}\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot\overline{1-k^2}}$. Il semiquadrato di quest' ultima velocità si scoprirà $= \frac{2n^2b^2y^2P.\overline{1-k^2}}{c^2LM}$, e la forza viva dell' elemento DE, la cui massa $\frac{Mdx}{L}$, $= \frac{2n^2b^2y^2Pdx.\overline{1-k^2}}{c^2L^2}$.

Pongo in cambio di dx il suo valore $\frac{kcL}{2nkb}\cdot\frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}} = \frac{cL}{2nb}\cdot\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo la detta forza viva $=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e conseguentemente quella della porzione BD della nostra corda $=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}.S\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$.

Avverto essere gQ $=\sqrt{c^2-y^2}$, e la sua differenza negativa QR $=\frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e perciò tirate le linee Qq, Yy parallele ad FC, $y\cdot\frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ pareggia l' aia elementare qQYy. Avremo dunque $\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}$.qQYy, e per conseguenza la forza viva della porzione di corda

BD

$BD = \overline{1-k^2} \cdot \frac{nbP}{cL} S \frac{y^2 dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \overline{1-k^2} \cdot \frac{nbP}{cL} \cdot Qfq$. Fatta l' osservazione che quando BH = BA = L, l' aja Q f q = n. 2 f F Q f 2 f = nbc, ci accorgeremo essere la forza viva della intera corda, allora che il punto F è pervenuto in g

$= \overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2 P}{L}$. L' allungamento della corda nella positura

A F B è $\frac{n^2 b^2}{L}$, e nella A g B $= \frac{n^2 k^2 b^2}{L}$, e quindi passando da un sito all' altro si è accorciata per la quantità $\overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2}{L}$, e l' elasticità della corda ha esercitata l' azione $P \cdot \overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2}{L}$, a cui si eguaglia la forza viva della corda nel sito A g B. Giunta poscia la corda alla linea retta A C B, abbiamo $k = 0$, e la forza viva $= \frac{P n^2 b^2}{L}$ di essa corda pareggia l'azione $Pa = \frac{P n^2 b^2}{L}$ esercitata dalla energia elastica P per lo spazio AFB — AB $= a = \frac{n^2 b^2}{L}$.

XXXV. Le cose dette mettono in chiaro lume l' aggiustatezza della mia soluzione, e quanto rettamente abbia determinata la curva A F B, posta la quale (oltrechè l' aggregato delle forze vive acquistate dagli elementi della corda è sempre uguale all' azione della elasticità d' essa corda) derivano dalla tensione adequatamente costante, ed uguale a P della corda medesima tali forze acceleratrici, che sono proporzionali agli spazj da percorrersi FC, DH, &c. condizione indispensabilmente necessaria, acciocchè tutti i punti della corda giungano alla linea retta ACB nello stesso momento.

XXXVI. Aggiungo una riflessione, che servirà a far vie più toccare con mano la verità della mia soluzione. Le formole nei numeri XXXIII. e XXXIV. ritrovate m' insegnano essere

BD

$BD - BH = \frac{nb}{cL} . CgQf = \frac{nb}{cL} . Qfq + \frac{nb}{cL} . CgQq$, e la forza viva del pezzo di corda BD, quando è giunto alla linea retta AB, $= P . \frac{nb}{cL} . Qfq$. Dovendosi a questa forza viva eguagliare l' azione, che l' ha generata, cioè a dire il prodotto della elasticità P nell' accorciamento della corda BD, ne risulta il detto accorciamento $= \frac{nb}{cL} . Qfq$. Concioffiachè la curva BD superi in lunghezza l' assissa BH più di quello essa corda si accorci per la quantità $\frac{nb}{cL} . CgQq$; egli è segno, che il punto D non viaggia per l' ordinata DH, ma bensì per la curva Dh, la quale è una parabola Apolloniana, che taglia la lineetta $hH = \frac{nb}{cL} . CgQq$, onde s' abbia $BD - BH - Hh = \frac{nb}{cL} . Qfq$ accorciamento della corda BD. Poichè $Cg = y$, e $gQ = \sqrt{c^2 - y^2}$, avremo $CgQq = y\sqrt{c^2 - y^2}$, ed $hH = \frac{nb}{cL} . CgQq = \frac{nby}{cL}\sqrt{c^2 - y^2}$. Dividendo il quadrato y^2 dell' ordinata $HD = y$ per l' assissa $Hh = \frac{nby}{cL}\sqrt{c^2 - y^2}$, scopriremo il parametro della parabola $= \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2 - y^2}}$, che si manterrà costante in qualunque positura AfB (*Fig.* 18.) si trovi la nostra corda; dimodochè Dh (*Fig.* 15.) sarà sempre la stessa parabola. In fatti sia (*Fig.* 18.) $Cf = kc$, $Hd = ky$, e non si altererà il valore di esso parametro $= \frac{kcLky}{nkb\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}} = \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2 - y^2}}$.

La linea Hh (*Fig.* 15.) è nulla in due circostanze o quando $y = o$, o quando $y = c$. La sua massima grandezza rispetti-

va-

vamente ad y corrisponde ad $y=\frac{c}{\infty}$, nel qual caso $Hh=\frac{nby}{L}$: ed anche in questo incontro più svantaggioso la linoetta Hh è minima in riguardo ad HD. La direzione in D della curva Dh è la stessa con quella del raggio DI osculante la curva AFDB nel punto D, il qual raggio taglia Hi doppia di Hh, e per conseguenza infinitesima rispettivamente ad HD. Innoltrandoci dal punto D al punto h, gli elementi della curva Dh passano per tutti i gradi dalla direzione Di alla DH normale ad AB. Quindi essendo Dh = DH adequatamente, e l' angolo iDH infinitesimo, rettamente nella mia soluzione ho confuse in una sola le lunghezze, e le direzioni delle linee Dh, DH.

XXXVII. Riesce agevole presentemente il dare una nuova soluzione del problema del numero II. ponendo in opera il metodo delle azioni. Quando la porzione di corda BD è pervenuta nel sito Bh, l' elasticità adequatamente costante, ed uguale a P d' essa corda ha replicati i suoi impulsi per tutti gli elementi dello spazio BD — BH — Hh, che s' eguaglia all' accorciamento della corda predetta. La similitudine dei triangoli DGE, DHi mi somministra l' analogia

DG : GE : : DH : Hi

$dx : dy : : y : \frac{ydy}{dx}$, che determina $Hi=\frac{ydy}{dx}$, e conseguentemente la sua metà $\frac{1}{2}Hi$, come pocostante proverò $=Hh=\frac{ydy}{2dx}$. Avremo dunque $BD-BH-Hh=s-x-\frac{ydy}{2dx}$, e l' azione della corda BD giunta in Bh eguale a $P.\overline{s-x-\frac{ydy}{2dx}}$. Prese le differenze, assumendo dx come costante, mi si presenta l' espressione $P.\overline{ds-dx-\frac{yddy}{2dx}-\frac{dy^2}{2dx}}$, e ponendo in vece di ds il suo valore $dx+\frac{dy^2}{2dx}$,

P.

$P \cdot dx + \frac{dy^2}{2dx} - dx - \frac{yddy}{2dx} - \frac{dy^2}{2dx} = - \frac{Pyddy}{2dx}$, infinitesimo incremento di azione, che s' impiega ad imprimere forza viva nell' elemento HK dalla corda BH, la massa del quale $= \frac{Mdx}{L}$.

XXXVIII. Mettendo $Hh = \frac{1}{2} Hi$, ho tacitamente supposto, che la curva Dh sia una parabola Apolloniana, la qual verità ha bisogno d' essere dimostrata. Dalle cose spiegate al num. X. si raccoglie, che se in qualunque positura AfB (Fig. 18.) della corda AFB le forze acceleratrici hanno da stare come le ordinate fC, dH; chiamate $FC = c$, $DH = y$, deggiono essere $fC = kc$, $dH = ky$. Avremo dunque $y : ky :: dy : kdy$, e quindi la differenza kdy di qualsivoglia ordinata dH sarà come l' ordinata medesima. Ora giacchè a $DH = y$ corrisponde la suttangente (Fig. 15.) $Hi = \frac{ydy}{dx}$ della curva Dh, alla ordinata dH (Fig. 18.) si riferirà la suttangente $= \frac{kykdy}{dx}$, e sostituendo in vece di dy, kdy i termini proporzionali y, ky, le dette suttangenti si riguarderanno nella ragione di $y^2 : k^2 y^2$, o sia dei quadrati delle ordinate DH, dH: ma questa è proprietà della parabola Apolloniana; dunque tale è la curva Dh (Fig. 15.), e perciò $Hh = \frac{1}{2} Hi$.

XXXIX. Conciossiachè i punti F, D hanno da passare gli spazj FC, Dh, ovvero DH nello stesso tempo, e colla legge di accelerazione d' un pendolo a cicloide, le velocità nei punti C, h dovranno corrispondersi nella ragione di FC:DH; e quindi la velocità nel punto h si esporrà per Ay (A è una costante da determinarsi a suo tempo) ed il semiquadrato della stessa per $\frac{A^2 y^2}{2}$, onde ne risulti la forza viva dell' elemento

HK

$HK = \frac{Mdx}{L} \cdot \frac{A^2y^2}{2}$: ma questa forza viva dee pareggiare l' azione, che la produce; dunque siamo pervenuti alla equazione $-\frac{Pyddy}{2dx} = \frac{MA^2y^2dx}{2L}$, che si riduce alla seguente : $-\frac{LPddy}{y} = MA^2dx^2$.

XL. Acciocchè svaniscano le seconde differenze, pongo $dy = Qdx$, ed ho nuovamente differenziando $ddy = dQdx$. Adempiuta la sostituzione del suo valore in cambio di ddy, trovo $-\frac{LPdQdx}{y} = MA^2dx^2$, o sia $-\frac{LPdQ}{y} = MA^2dx$, e poichè $dx = \frac{dy}{Q}$, $-\frac{LPdQ}{y} = \frac{MA^2dy}{Q}$, e levando le divisioni $-LPQdQ = MA^2ydy$, e finalmente integrando, $LP \cdot \overline{G^2 - Q^2} = MA^2y^2$.

XLI. Si determina la costante G, riflettendo, che quandó $HD = y$ giunge al massimo valore $CF = c$, diviene $\frac{dy}{dx} = Q = 0$. avremo dunque $LPG^2 = MA^2c^2$; e per conseguenza $G^2 = \frac{MA^2c^2}{LP}$, e fatta la surrogazione di questo valore, $LP \cdot \frac{MA^2c^2}{LP} - Q^2 = MA^2y^2$, o pure $MA^2 \cdot \overline{c^2 - y^2} = LPQ^2 = \frac{LPdy^2}{dx^2}$, ed effettuate le necessarie operazioni, $dx = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} \cdot \frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$.

Dalla integrazione ne nasce $x = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} \cdot S \frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$: non

N ag-

aggiungo costante; perchè sendo $S\frac{cdy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ uguale all' arco circolare fQ, ad $x=o$ corrisponde $fQ=o$.

XLII. Resta da stabilire il valore della costante A. Ho già notato essere nel punto B, $y=o$, in cui è parimente $fQ=o$. La detta ordinata frattanto deve altresì essere nulla nel punto A, il che interverrà, quando sia l'arco fQ o eguale ad un semicircolo $fQF2f=2b$ (*Fig.* 15.), o a due semicircoli (*Fig.* 16.), o a tre (*Fig.* 17.), &c., o generalmente ad $n.2b$, essendo n uguale a qualsivoglia numero intero positivo. Ripigliata per mano la formola $x=\frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}.S\frac{cdy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, si faccia in essa $x=L$, $S\frac{cdy}{\sqrt{c^2-y^2}}=2nb$, e ne risulterà $L=\frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}.2nb$, e fatte le necessarie operazioni, $A^2=\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$. Pongasi in luogo di A^2 questo valore nella nostra formola, e si scoprirà finalmente $x=\frac{cL}{2nb}S\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, conforme abbiamo trovato al numero IV.

XLIII. Ho affermato al numero XXXI. che le rigidità naturali r delle corde sonore non alterano punto i tempi delle minime vibrazioni trasversali. Si applichi al punto medio C (*Fig.* 24.) della corda A B con direzione ad essa normale la forza f, che cagioni la saetta $CF=s$. Nello Schediasma III. mi è riuscito di dimostrare $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3+\frac{1}{2}Ls^2}=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ posta s minima. Se la nostra corda fosse priva di naturale

rigi-

rigidità, per ottenere la faetta $CF = s$ ci vorrebbe la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$, ed essendo essa corda fornita della rigidità r, si richiede la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$, le quali forze sono adequatamente uguali, consistendo la loro differenza in una quantità infinitesima del terzo grado.

Si ponga $FB = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$, e $P + p$ sia la forza, che stira direttamente la semicorda FB. Per le cose dimostrate nello Schediasma poco fa citato avremo $\frac{\overline{2P + 2p} \cdot s}{\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l} = f$, $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2}$. Sostituisco nella prima formola in vece di $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$ il suo valore somministratomi dalla seconda, e trovo $\frac{\overline{2P + 2p} \cdot s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2}} = f$. Da questa espressione, e dalla formola soprapposta $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}L^2 + s^2}$ nasce l' equazione

$$\frac{\overline{2P + 2p} \cdot s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2}} = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}L^2 + s^2},$$

da cui si raccoglie

$$P + p = \frac{P}{\frac{1}{2}L}\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2} + \frac{rs^2}{L\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2}}:$$

ma $\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}=\frac{1}{2}L+\frac{s^2}{L}$; dunque $P+p=P+\frac{Ps^2}{\frac{1}{2}L^2}+\frac{rs^2}{\frac{1}{2}L^2+s^2}$, o sia $p=\frac{\overline{2P+2r.}\,s^2}{L^2}$, aumento di tensione, che la forza f cagiona nella corda AFB.

Se la corda è priva di naturale rigidità, la forza $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$ produce l'accrescimento di tensione $p=\frac{2Ps^2}{L^2}$: che se la corda, come in fatti interviene nelle corde fisiche, è fornita di rigidità, la forza $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ fa giungere il detto accrescimento alla grandezza $\frac{\overline{2P+2r.}\,s^2}{L^2}$, che può corrispondere a $\frac{2Ps^2}{L^2}$ in qualunque finita proporzione di maggiore inegualità, secondo il valore della rigidità r. Una sperienza registrata nel mentovato Schediasma III. c' istruisce, che la rigidità d' una corda di ottone tesa dalla forza P uguale ad once 140 ascendeva ad once 24054, e perciò rispettivamente ad essa corda $\frac{\overline{2P+2r.}\,s^2}{L^2}:\frac{2Ps^2}{L^2}::24194:140$, cioè prossimamente come $173:1$.

Ella è cosa notabile, che due forze adequatamente uguali cagionino tanta diversità nell' aumento della tensione: ma questa circostanza appunto, che la differenza di aumento di tensione, nascente dal vario valore della rigidità naturale, sia prodotta da forze trasversali pari adequatamente, ci guida alla conseguenza, che non nascendo computabile mutazione nelle forze vive,

vive, e nelle velocità, i tempi delle minime oscillazioni dalla rigidità della nostra corda, la cui massa fosse tutta raccolta nel punto F, non restino punto alterati. Ho supposto l' intera massa unita nel punto F, a cagione che una corda fisica oscillando non mantiene la figura triangolare AFB, ma si adatta alla curva AFDB (*Fig.* 15.) da me determinata, conforme ho fatto vedere ai numeri XI. e XII.

XLIV. In simil guisa nella corda AFDB, in cui la saetta $CF = c$ sia sempre costante, ella è trascurabile la diversità della forza viva, e della velocità di qualsivoglia elemento DE, traente l' origine dal vario valore della rigidità. E vaglia il vero, giacchè in riguardo alla corda AFB (*Fig.* 24.) $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2} = \frac{1}{2}L + \frac{s^2}{L}$, ne segue essere $l = \frac{2s^2}{L}$, e ponendo $s = c$, $l = \frac{2c^2}{L}$. L' allungamento della corda AFDB (*Fig.* 15.) l' abbiamo trovato eguale ad $\frac{nb^2}{L}$. Facciasi $\frac{2c^2}{L} : \frac{nb^2}{L} :: \frac{\overline{2P+2r}.c^2}{L^2} : \frac{nb^2.\overline{P+r}}{L^2}$, ed il quarto termine esprimerà l' accrescimento di tensione, che si richiede per produrre l' allungamento $\frac{nb^2}{L}$. Quindi la totale elasticità della corda nella positura $AFDB = P + \frac{nb^2.\overline{P+r}}{L^2}$, la quale operando per lo spazio $\frac{nb^2}{L}$ esercita l' azione $\frac{nb^2P}{L} + \frac{n^2b^4.\overline{P+r}}{2L^3}$, a cui si eguaglia la forza viva della corda medesima: ma questa è sempre adequatamente uguale ad $\frac{nb^2P}{L}$, qualunque grandezza o nulla, o finita si assegni alla rigidità r, e da essa forza

viva

viva dipendono le velocità de' punti F, D, &c. della corda, dunque nelle velocità dei nominati punti non nasce computabile alterazione, e perciò la rigidità r nulla influisce ne' tempi delle minime vibrazioni.

XLV. Se taluno trovasse che ridire sopra la mia soluzione, asserendo, ch'essa serve non per le finite, ma soltanto per le infinitesime vibrazioni delle corde sonore; soggiungerei, che quando si passa dal matematico al fisico, i minimi fisici stanno in luogo dei geometrici infinitesimi. La mia soluzione adunque si adatta alle minime fisiche oscillazioni, e di tal fatta si debbono riputar tutte quelle accettate dalla musica, che o più ristrette, o più dilatate conservano sempre lo stesso tuono, conforme la mentovata soluzione richiede. Ed in fatti tanto è giusta la mia soluzione, quanto che da essa si raccolgono tutti que' fenomeni, che nelle corde fisiche si sperimentano, fra i quali di due soli molto importanti terrò discorso. M insegna la stessa, che una corda non può oscillare salvo ehe intera, o divisa in parti eguali, nè rendere se non se i suoni espressi dalla serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., e le corde fisiche si sottomettono a questa legge, dandoci esempigrazia la tromba marina solamente i descritti suoni, esclusi gli altri tutti. In oltre dalla mia soluzione deducesi, che nei tempi delle vibrazioni delle corde non ha luogo la loro naturale rigidità, e dalla esperienza raccolgo, che due corde, una d' ottone, e l' altra d' acciajo, benchè diversamente rigide, si vibrano in tempi proporzionali alle quantità $\sqrt{\frac{LM}{P}}$, nelle quali la rigidità nè punto nè poco non c' entra. Questa conformità della mia soluzione coi fenomeni mi rende sicurissimo della sua aggiustatezza.

XLVI. I sommi geometri li Signori d' Alembert, e Leonardo Eulero nelle Memorie della Regia Accademia di Berlino, ed il Signor Luigi de la Grange nel tomo primo intitolato *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatæ Taurinensis* pretendono, che oltre la figura dal Taylor determinata, possa una corda, che si vibra, prenderne infinite tutte fra loro diverse. Al contrario il celebre Signor Daniello Bernoulli nelle citate Memorie dell' Accademia di Prussia sostiene, che la soluzione del Sig. Taylor è sola capace di soddisfare a tutti i casi possibili del problema, di cui si parla. Salvo sempre il dovuto

to rifpetto ai tre Matematici primieramente nominati, io aderifco alla fentenza del quarto. E per mettere in chiaro la ragione che mi convince, offervo, che fi vagliono effi di formole, le quali non poffono avverarfi fe non in que' cafi, in cui la forza, che fpinge direttamente una particola della corda, non abbia parte nel moto dell' altre particole. Efercitando azione per lo fpazio minimo $-dy$ la forza follecitante f accrefca la velocità u nella maffa m, e fi avrà la formola fempre vera $-fdy = mudu$. Che fe la maffa m cammina lo fpazio $= -dy$ nello fteffo tempicello dt impiegato dalla forza ad agire per lo fpazio fuddetto, avremo in tal circoftanza $u = -\frac{dy}{dt}$, e $du = -\frac{ddy}{dt}$, prefo dt come coftante, ed effettuate le foftituzioni giungeremo alla equazione $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$ ufata dai lodati Scrittori. Si muti ora fuppofizione, e fi finga che la forza f applicandofi allo fpazio $-dy$ acceleri le velocità u, u' delle due maffe uguali m, m', la prima delle quali nel tempo dt dell' azione paffi lo fpazio $-dy$, ma non così la feconda. Nella formola $-fdy = mudu + m'u'du'$ fi foftituifcano in cambio di u, e di du i valori uguali $-\frac{dy}{dt}$, $-\frac{ddy}{dt}$, e ne rifulterà l' equazione $-fdy = \frac{mdyddy}{dt^2} + m'u'du'$, la quale non fi accorda colla $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$, di cui perciò in queft' incontri è vietato il far ufo.

XLVII. Paffiamo adeffo dal generale al particolare delle corde vibranti. Se la forza (*Fig.* 15.), che fpinge l' elemento ED dalla corda AFB per la direzione PI, accelera foltanto il detto elemento, è conceffo l' adoprare la formola $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$: ma fe la fibra ED comunica il fuo moto alle fibre collocate a deftra, e a finiftra; egli è d' uopo abbandonare la det-

detta formola, ficcome quella, che non contien verità. Posto che la corda si adatti ad una delle figure da me determinate, i suoi punti si movono con velocità proporzionali alle distanze dall' asse AB, e conforme ho provato al numero XII. il moto di un punto non influisce in quello dell' altro. Ma quando conformata la corda a figure diverse, non si osserva la detta legge di velocità; segue la comunicazione di moto fra gli elementi della corda. La formola pertanto $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$ non può somministrare altre vere figure, salvo che quelle da me stabilite. E quindi non è maraviglia, se usandola il Signor Eulero senza le debite restrizioni, si sia abbattuto in tali conseguenze, che non giudica necessario l' aver riguardo alla legge di continuità in una funzione, che dipende dalla curva iniziale della corda. Il Signor d' Alembert è di contraria opinione, e con lui va d' accordo il Signor de la Grange.

XLVIII. Se la corda vibrandosi un solo suono produce, dee prendere una delle mentovate figure: ma se, come realmente succede, col suono principale 1 della corda intera sono misti i suoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. delle sue parti aliquote; si compongono insieme i moti proprj delle figure 15, 16, 17, &c., ed innumerabili nuove figure ne nascono. Ed ecco col mezzo della composizione dei moti sciolto agevolmente un problema, che per altra strada riuscirebbe difficilissimo. Secondochè la corda s' incita al tremito piuttosto in un modo, che nell' altro, sceglierà essa la più acconcia figura, a cui può accomodarsi; e perciò il suono della corda non è mai solitario. Ho narrato al numero XX. avermi l' esperienza istruito, che stimolata una corda vigorosamente all' oscillazione in poca distanza da uno dei due scannelli, si sentono, ponendovi la dovuta attenzione, i suoni 3, 5, che al principale 1 si riferiscono in quinta sopra l' ottava, ed in terza maggiore sopra la doppia ottava. L' ottava semplice 2, e la duplicata 4 si possono malagevolmente discernere; perchè siccome equisonanze, s' incorporano col suono della corda totale. Nel citato luogo ho insegnato un artificio per udire belli, e distinti in una corda i suoni delle sue parti aliquote, ch' erano dianzi mischiati col suono fondamentale.

SCHE-

SCHEDIASMA V.

Delle vibrazioni delle corde aeree.

I. Detto quanto basta intorno alle corde solide, mi rivolgo alle fluide contenute nelle canne degli stromenti da fiato, le quali corde sono que' corpi, che concepiscono suono nei nominati stromenti. E vaglia il vero, non può certamente il suono attribuirsi ai corpi di tali stromenti; perchè se questi suonassero, prendendoli in mano la loro palpitazione sonora si ammortirebbe, come in un campanello, o in un cilindro di creta, o di acciajo succede. Ora la voce di un flauto, d' una canna d' organo presi in mano non resta punto pregiudicata, e conseguentemente in essi il legno, o lo stagno non suona. Oltre a ciò se i corpi di sì fatti stromenti suonassero, lavorate due canne d' organo egualmente lunghe, ma di diametro, grossezza, e materia diverse, dovrebbero produrre suoni differentissimi in riguardo al grave, e all' acuto, il che di fatto interviene nei cilindri vuoti, varj di materia, di grossezza, e di diametro, ma pari in lunghezza. Le nominate canne frattanto si trovano unisone; dunque non suona la materia solida, onde sono formate, ma bensì l' aria in esse canne rinchiusa.

II. La chiarezza del metodo richiede, che dia principio dalla considerazione delle canne cilindriche d' organo, per fare poi transito alle convergenti, divergenti, e d' altre svariate figure. L' aria in una canna cilindrica fa le sue vibrazioni nello stesso modo come una corda tesa. Questa viene resa elastica dalla forza, o peso, che se le suppone applicato, e quella dal soprapposto peso dell' atmosfera. Espressa dunque per m la massa della corda d' aria, che riempie la canna, per l la lunghezza d' essa corda, per p il peso della colonna d' aria soprastante, per t il tempo misurato coi secondi d' una vibrazione della corda stessa, e dinotando $b:c$ la proporzione del quadrante al raggio, b la lunghezza del pendolo a secondi, e finalmente n un numero della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. secondochè la nostra corda oscilla o intera, o divisa in parti uguali, avremo come nelle corde solide $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{lm}{bp}}$ (1).

Il peso dell' atmosfera soprastante alla canna equivalga ad un volume di mercurio di figura cilindrica, la cui altezza a, e la base uguale a quella della canna; e conciossiachè il volume della corda d' aria si eguaglia alla lunghezza l moltiplicata nella base della corda stessa, o sia della canna, si raccolga, che i due volumi di mercurio, e d' aria stanno fra loro come $a:l$. Si suppongano come $G:g$ le gravità specifiche, o densità del mercurio, e dell' aria; e giacchè le masse si corrispondono nella ragione composta dei volumi, e delle gravità specifiche, si avrà $p:m::aG:lg$. Nella soprapposta formola si sostituiscano in cambio di p, m le grandezze proporzionali aG, lg, e ci si presenterà $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{baG}}$ (2).

III. La base della canna non ha luogo nella determinazione del suo tuono, o sia nella durata d' una sua vibrazione, restando essa base esclusa dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{baG}}$, e colla teorica trovandosi uniformi gli esperimenti. Quantunque la base della canna indeffinitamente crescesse, non pertanto il suo tuono si muterebbe. Ora l' allargare indeffinitamente le pareti della canna, egli è lo stesso che il totalmente levarle, e far transito dall' aria chiusa all' aria libera; dunque anche nell' aria libera un' onda pari in lunghezza alla corda aerea nella canna contenuta sarà unisona ad essa canna.

Nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. dimostrerò, che il suono scorre lo spazio l nel tempo $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2b\sqrt{baG}}$; formola, che si accorda colla testè ritrovata, purchè sia $n = 1$, e la corda d' aria intera si vibri. Quindi nel tempo stesso, in cui la canna fa una oscillazione, il suono viaggia per uno spazio lungo quanto la corda d' aria contenuta dentro la canna. Afferma il Cavalier Nevvton (a) che l' onde generate nell' aria da una canna d' organo sono il doppio lunghe della stessa can-

(a) Philos. natur. Princ. Math. Amstelodami 1714. pag. 344.

canna. A questo equivoco ha dato motivo il celebre M. Sauveur, il quale nelle canne d' organo conta per una vibrazione un' andata, ed un ritorno, cioè a dire due vibrazioni conforme il linguaggio comune. Se dunque in tempo di due vibrazioni della canna, che contiene una corda, la cui lunghezza l, il suono, che si move equabilmente, scorre lo spazio $2l$; egli è manifesto che nel tempo d' una sola vibrazione camminerà lo spazio l, e si genererà un onda eguale nella lunghezza alla corda d' aria rinchiusa nella canna.

IV. C' insegna la nostra formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{baG}}$, che nello stesso parallelo, o anche in praralleli diversi, ma non sì fattamente rimoti, che si alteri sensibilmente la lunghezza b del pendolo a secondi, colla condizione altresì, che l' aria sia egualmente calda, onde le sue densità g accettino la proporzione dei pesi comprimenti aG, e si mantenga costante la frazione $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$, i tempi delle oscillazioni delle corde aeree in più canne rinchiuse, le quali corde si vibrino intere, o divise nello stesso numero n di parti eguali, si riferiranno nella ragione delle lunghezze. Questo canone è noto per pratica ai facitori d' organi, i quali allora quando vogliono, che per esempio due canne facciano l' ottava, cioè che i tempi delle vibrazioni loro stiano come $2:1$, stabiliscono la prima canna il doppio lunga della seconda. Intanto si cavi la conseguenza necessaria alle cose, che son per dire, che divise due corde aeree in minimi strati ugualmente alti, il tuono d' esse corde non dalle basi degli strati, ma dal numero loro proporzionale alla lunghezza della corda unicamente dipende.

V. Che se in diversi siti, o pure nello stesso, ma in differente stagione, il calore dell' aria sia vario, rimanendo per altro costante la lunghezza b del pendolo a secondi, si scopriranno i tempi delle vibrazioni delle canne come $\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$, e quelli della canna medesima come $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$. Osserveremo nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. che nelle opposte stagioni d' inverno, e di estate le velocità del suono si corrispondono come $26:27$, e che

per conseguenza scorre lo stesso spazio in tempi, che stanno in ragione di 27:26: ma nel tempo, in cui dal suono si cammina lo spazio l, una corda d' aria egualmente lunga contenuta dentro una canna compie una vibrazione; dunque la medesima corda nelle stagioni iemale, ed' estiva oscilla in tempi, che si riferiscono nella proporzione di 27:26, ed è nell' inverno un terzo di tuono, o di seconda maggiore più grave che nella state. E poichè t come $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ rispettivamente alla stessa canna, sarà questa grandezza nelle contrarie mentovate stagioni come 27:26, ed il suo quadrato $\frac{g}{aG}$, o sia la densità dell' aria divisa pel peso comprimente come $\overline{27}^2 : \overline{26}^2$, o a un di presso come 14:13; e quando il peso comprimente non sia diverso, le densità dell' aria si riguarderanno in tale ragione.

VI. Il dottissimo Signor Leonardo Eulero guidato dalle sue teoriche asserisce (*b*), che in varie stagioni la diversità del suono di una canna d' organo può giungere ad un tuono intero. Conferma egli questo suo detto coll' esperienza dei musici, i quali usando nel tempo stesso stromenti da corde, e da fiato, trovano questi così fattamente mutabili (e la varietà massima ascende ad un tuono) che bisogna, ch' ora rallentino, ed ora stirino le corde di quelli, acciocchè cogli stromenti da fiato vadan d' accordo. Per accertarmi della verità della riferita sperienza, accordai all' unisono nella stagione d' inverno un gravicembalo, ed un flauto, e paragonatili insieme nel cuor della state, trovai per appunto il secondo notabilmente più acuto del primo per una seconda maggiore, o tuono all' in circa. Se il gravicembalo non fosse soggetto a variazione, egli è indubitato, che la diversità tutta d' un tuono dovrebbe attribuirsi allo stromento da fiato. Messi frattanto da parte gli stromenti variabilissimi guerniti di corde di minugia, un gravicembalo cangia di tuono al mutarsi delle stagioni: ed essendo, come poco stante vedremo, l' alterazione delle corde solide contraria a quella delle fluide, di maniera che calando quelle di tuono, crescono queste, o all' opposto,

(b) *Tentamen novæ Theoriæ Musicæ*, pag. 21.

ſto; ne ſegue che accordati all' uniſono un gravicembalo, ed uno ſtromento da fiato in tempo d' inverno, ſi trovi il primo in tempo d' eſtate più grave del ſecondo per un intero tuono. Ho già ſtabilito che paſſando dall' inverno alla ſtate i ſuoni delle corde d' aria creſcono per la terza parte di un tuono; dunque fa d' uopo, che i ſuoni delle corde di metallo calino per due terzi di tuono, onde ne riſulti nella più calda ſtagione, conforme ſi raccoglie dalla ſperienza, un tuono di ſvario fra uno ſtromento da fiato, ed un gravicembalo, che in tempo d' inverno erano tra loro uniſoni.

VII. Baſta rifletter, che due corde, una fluida, e l' altra ſolida, ſono reſe elaſtiche da forze contrarie, cioè quella da una forza premente, e queſta da una forza ſtirante, per chiaramente capire, che la rarefazione cagionata dal caldo debba in eſſe corde produrre contrarj effetti, e lo ſteſſo dicaſi della coſtipazione cagionata dal freddo. Allora che una corda ſolida ſi rareſà pel caldo, eſercita meno sforzo contro il perno ſtirante, e conſeguentemente cala di tuono, ſeguendo in eſſa il medeſimo effetto, come ſe non eſſendoſi rarefatta, aveſſi allentato il perno. All' oppoſto coſtipata dal freddo una corda ſolida, s' aumenta il ſuo sforzo contro del perno, e perciò creſce di tuono, ſuccedendo in eſſa lo ſteſſo effetto, come ſe non eſſendoſi coſtipata, aveſſi ingrandita la ſua tenſione.

Soſtituito al perno un peſo tendente, non ſi altera per motivo della tenſione il tuono della corda allo variarſi delle ſtagioni. Mentre la corda ſi rareſà, il peſo diſcende, e mentre ſi coſtipa, il peſo aſcende; e perciò le ſue fibre ſono ſempre ugualmente teſe. Immaginiamoci che rarefacendoſi la corda, il peſo corriſpondentemente ſi ſcemi, di maniera che non diſcenda, e ſi fermi immobile nel ſuo ſito; e che al contrario ſecondochè la corda ſi coſtipa, il peſo ſi accreſca, onde rimanendo ſtabile nel poſto ſolito, non aſcenda; e facilmente ſcopriremo, che da sì fatti peſi variabili vengono giuſtamente rappreſentati i mutui sforzi della corda, e del perno, minori l' eſtate, e maggiori l' inverno.

Intanto non diſſimulo una obbiezione, ed è che rarefacendoſi, o coſtipandoſi una corda ſolida, ſi rareſà parimente, o ſi coſtipa la tavola, in cui è teſa; e conſeguentemente non ſi altera la ſua tenſione. Sarebbe vera la concluſione, ſe la corda,

e la

e la tavola per la direzione delle ſue vene ſi rareſaceſſero, e coſtipaſſero dal pari; ma l' eſperienza dimoſtra che la prima è più atta alla rareſazione, ed alla coſtipazione della ſeconda. Ella è la differenza fra le rareſazioni, e le coſtipazioni della corda, e della tavola ſu cui è teſa, che opera i cangiamenti di tuono in eſſa corda, i quali ſi troverebbero molto maggiori, ſe la lunghezza della tavola non veniſſe o accreſciuta, o diminuita dall' azione delle ſtagioni.

VIII. Paſſiamo adeſſo alla conſiderazione delle corde aeree reſe elaſtiche da una forza premente. Quando l' aria vie più ſi riſcalda, creſce la ſua elaſticità, ed acciocchè non ſi rareſaceſſe, ſarebbe d' uopo accreſcere a dovere il peſo dell'atmosfera. Quindi ſi diminuiſce la proporzione fra la denſità g dell' aria, ed il peſo comprimente aG, e per conſeguenza il valore della quantità $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ nella ſtagione d' eſtate è più picciolo che in quella d' inverno. E conciosſiachè i tempi delle vibrazioni della ſteſſa canna ſieno proporzionali a $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$, conforme ho avvertito al numero V., ne ſegue che in una oſcillazione d'eſtate c'impiegherà minor tempo che in una d'inverno, è perciò renderà un ſuono più acuto, e già ho dimoſtrato nel citato numero V., che i detti tempi nella più fredda, e nella più calda ſtagione ſi corriſpondono nella ragione di 27 : 26.

IX. Raccoglieſi dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{aG}}$, che potendo ſoltanto competere ad n i valori, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſecondochè la corda d' aria ſi vibra o intera, o diviſa in due, in tre, in quattro, &c. parti eguali, ha la ſteſſa ſolamente facoltà di oſcillare in tempi proporzionali ai termini della ſerie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. E poichè i ſuoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari ſtanno in ragione inverſa dei tempi, che in una vibrazione s' impiegano, produrrà eſſa corda nelle addotte circoſtanze i ſuoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c, eſcluſi tutti gli altri di mezzo. In fatti dando il conveni-

en-

ente fiato ad una canna d' organo, s' udirà il suono 1, ed incitandolo poscia a dovere si passerà con un salto di ottava al suono 2, ed indi con un salto di quinta al suono 3, &c. nè per quante prove si facciano, riuscirà mai di ottenere alcun suono intermedio fra l' uno e il due, fra il due e il tre, &c. Or ecco chiaramente spiegato il maraviglioso fenomeno dei suoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. della tromba, e del corno da caccia, della qual cosa ne ho dato un cenno nel precedente Schediasma IV. al numero VI. Il citato numero ci documenta, che una corda elastica non può oscillare, salvo che intera, o divisa in parti aliquote; e perciò riferendosi i suoni in proporzione reciproca delle lunghezze di esse parti, se la corda intera produce il suono 1; le due metà renderanno il suono 2, le tre terze parti il suono 3, e così di mano in mano. Nè si troverà giammai alcuna voce di mezzo; perchè questa sarebbe propria di una parte aliquanta, e la corda non può suonare in parti aliquante distribuita.

X. Una corda di lunghezza finita, atta a concepire un suono determinato, è parte aliquota di una corda lunga infinitamente, la quale per conseguenza può in se stessa il detto suono ricevere qualunque egli siasi. Quando palpita un corpo elastico, il tremito sonoro si diffonde sfericamente all' intorno per tanti raggi, o corde aeree, che continuerebbero all' infinito, se il mentovato tremito non venisse finalmente dalle resistenze attutito, mentre ancora ci resta dell' aere immenso, a cui si avrebbe potuto comunicare. Ciò non si verifica solo nell'aria libera, come in un' aperta campagna, ma parimente nei luoghi chiusi, nei quali qualsivoglia linea sonora si continua col mezzo di replicate riflessioni, fin tanto che la palpitazione si annichila. Potendo adunque le corde esterne d' aria considerarsi d' infinita lunghezza, sono idonee a ricevere, ed a portarci all' orecchio qualunque suono.

Non c' è per tanto bisogno di ricorrere all' ipotesi di M. de Mairan, che si è immaginato l' aria composta di particole di tutti i tuoni, fra le quali si vibrino quelle soltanto, che sono unisone al corpo sonoro, o alla causa determinante il suono. Se l' aria è capace di qualunque suono, perchè formata di particelle talmente varie di tuono, che ogni suono ritrova le unisone da porre in moto; dunque anche la tromba, in cui il cor-

po

po, che suona, si è l' aria, sarà atta a ricevere qualunque suono, il che è contrario agli esperimenti. Dando al fiato un impulso conveniente, oscillano le particole, il cui tuono si esprime per l' unità: accrescendo debitamente lo sforzo del fiato, le particole del tuono due concepiscono vibrazione. Ora io dimando il perchè i fiati di vigore intermedio non facciano oscillare le particole di tuono mezzano fra l' unità, ed il binario. S' applichi il discorso alle particole di tuono medio fra il due ed il tre, fra il tre ed il quattro, &c. Di più accresciuta, o diminuita la lunghezza della tromba, le particole, che prima si vibravano, rimangono in quiete, ed al contrario quelle, ch' erano immobili, acquistano palpitazione. Quindi chiaramente comprendesi, che non dai tuoni delle particole aeree, ma bensì dalla lunghezza della corda nel corpo della tromba contenuta, e dalle sue divisioni in parti aliquote i suoni d' esso stromento dipendono: fatto uso del qual principio, agevolmente si spiega, conforme ho fatto vedere, poter l' aria esterna in se stessa qualsivoglia suono ricevere. Questa è per lo più l' infelice condizione delle ipotesi, che servono non v' hà dubbio a spiegare que' fenonemi, in grazia dei quali sono state inventate; ma poste al cimento di qualche sperienza, che non sia caduta sotto la considerazione del loro autore, non istanno salde alle prove.

XI. Sin quì non ho considerato salvo che le canne cilindriche, e scoperte le leggi delle loro oscillazioni, mi sono fatto strada a dilucidare alcuni fenonemi dell' onde aeree apportatrici dei suoni. Ma conciossiachè non solo si danno delle canne, ch' io chiamerò con vocabolo generale prismatiche, alle quali tutte si applicano i soprapposti raziocinj, ma eziandio di quelle, che sono lavorate a forma di frusti conici, o piramidali, convergenti, o divergenti, o in qualsisia altra guisa, egli è di mestieri, per non prendere abbaglio, l' avvertire, come vadano generalmente espressi i pesi comprimenti, e le masse d' aria, che dentro esse canne vengono poste in oscillazione; onde chiaramente spicchi la verità comprovata dalla sperienza, che le vibrazioni di sì fatte canne altresì seguitano la legge di quelle delle canne prismatiche.

La densità dell' aria è la stessa tanto in una canna prismatica, quanto in un' altra di qualsisia differente figura. E poichè la densità segue la proporzione del peso comprimente, dovrà

vrà a questo adattarsi in ambo i casi la stessa espressione: ma in riguardo alle canne prismatiche viene dinotato dalla quantità aG; dunque la medesima quantità lo indicherà anche nelle canne, di cui parliamo.

Ho di sopra avvertito ai numeri IV. e V. che i soli elementi atti a variare il suono delle corde aeree contenute in due canne sono, non la base maggiore, o minore degli strati egualmente alti, che le compongono, ma solamente il numero loro, o sia la lunghezza delle corde, ed il diverso valore della grandezza $\frac{g}{aG}$, cioè della densità g dell' aria divisa pel peso comprimente aG, purchè, come si suppone, perseveri sempre invariata la lunghezza b del pendolo a secondi. Da ciò se ne deduce essere unisone due canne, in cui il numero degli strati ugualmente alti è costante, e costante altresì la relazione di $g : aG$. Rispettivamente ad entrambe adunque il tempo di una vibrazione si esporrà per $\frac{c}{2nb} \cdot \frac{\sqrt{lg} \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{aG} \cdot \sqrt{b}}$, e siccome aG esprime da un canto, e dall' altro il peso comprimente, così lg dinoterà quella massa di amendue le corde, la quale ha luogo nella determinazione del tuono.

XII. Leggo nell' opera altrove citata dell' acutissimo Signor Eulero pag. 25. che per trovare il suono d' una canna convergente, o divergente, o di qualsisia altra figura, fa d' uopo considerare una corda simile, e scopertone il suono, supporre la stessa corda formata d' aria, ed il peso tendente uguale alla forza dell' atmosfera, e raccogliere poi da questi nuovi dati il suono della canna. Che se un tale problema si scioglierà universalmente assegnando qualsivoglia figura alla canna, si capirà la notissima proprietà delle canne prismatiche, che serrate al di sopra rendono un suono per un' ottava più grave. Quanto a quest' ultimo fenomeno vedrà il Lettore con quale semplicità io lo spieghi al numero XVIII. Ma rivolgendo la riflessione alle canne di figura diversa dalla prismatica, sembrami non potersi il metodo del Signor Eulero approvare. Ai tempi delle vibrazioni delle canne, e delle corde prismatiche si adattano le stesse formole; perchè gli strati tutti ed in quelle, ed in queste hanno ricevuta da una compressione, o stiramento uniforme pari elasticità.

Ora una tale corrispondenza non passa fra una canna, ed una corda solida simili di figura, ma non prismatiche. In ogni strato della canna le particole tutte sono ugualmente dense, compresse, ed elastiche: così non succede negli strati della corda, i quali quanto hanno la base maggiore, tanto sono composti di particole meno tese; imperciocchè distribuendosi la forza stirante in un numero di parti eguale a quello delle particole formanti la base d' uno strato, ne tocca a ciascuna particola minor porzione, secondochè è più grande il numero di esse particole. Dipende la notata diversità dalla varia natura del fluido, e del solido.

XIII. Che se si concepisse l' idea matematica sì, ma non fisica di una corda solida non prismatica, in cui le fibre di qualunque minimo strato fossero ugualmente tese, il che addiverrebbe, quando ogni strato fosse teso da forze alla base proporzionali, in tal caso la nostra corda si potrebbe senza taccia di paralogismo con una canna di simil figura paragonare.

Si generi la figura della corda Mo (*Fig.* 25.) dal girarsi della corda MNO intorno l' asse AB, e siano $AB = L$, $BH = x$, $HK = dx$, e le due sezioni circolari $Oo = \epsilon$, $Nn = \mu$. Nominata M la massa di una corda cilindrica egualmente lunga, fornita della base $Oo = \epsilon$, e composta della stessa materia, determino la massa $\frac{M\mu dx}{\epsilon L}$ dell' elemento HK della corda Mo col mezzo della seguente analogia $\epsilon L : \mu dx :: M : \frac{M\mu dx}{\epsilon L}$. Sia P la forza tendente la sezione $Oo = \epsilon$, e conciossiachè le forze stiranti deggiono essere proporzionali alle sezioni, avremo $\epsilon : \mu :: P : \frac{P\mu}{\epsilon}$, ed il quarto termine si eguaglierà alla forza stirante l' elemento HK.

Vibrandosi la nostra corda si adatterebbe alla curva AFB (*Fig.* 15.) determinata nel numero V. dello Schediasma IV. e sarebbe isocrona ad una corda cilindrica della stessa materia, e lunghezza, la cui grossezza $Oo = \epsilon$, e la tensione $= P$. Allora che l' elemento HK si ritrovasse nel sito DE, sarebbe tirato per le direzioni delle tangenti PD, PE dalla medesima forza $\frac{P\mu'}{\epsilon}$,

come

come se la corda A B avesse la grossezza costante μ, le convenisse la massa $\frac{M\mu}{e}$, e tutti i suoi elementi fossero tirati dalla mentovata forza $\frac{P\mu}{e}$. Quindi posta l' ordinata $DH = y$, per le cose dimostrate nel numero VII. del citato Schediasma sarebbe la forza acceleratrice dell' elemento D E per la direzione

$DH = \frac{4n^2b^2y}{c^2L} \cdot \frac{P\mu}{e \cdot \frac{M\mu}{e}} = \frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$: ma dalla stessa forza acceleratrice è stimolato l' elemento DE d' una corda cilindrica della medesima materia, e lunghezza, la cui grossezza $Oo = e$ (*Fig.* 25.), e la tensione $= P$; dunque la corda Mo, e la detta corda cilindrica sarebbero unisone; proprietà, che ho già stabilito al numero XI. parimente avverarsi nella canna di qualsivoglia figura Mo, e nella cilindrica A B. Oo. Perciò paragonando insieme la corda Mo colla canna Mo, e la tante volte nominata corda cilindrica con una canna di simile ugual volume, potrei rettamente conchiudere, che nella stessa proporzione, in cui si corrispondono i suoni della terza e della quarta, si riguardano altresì quelli della prima, e della seconda.

XIV. Quantunque sembri perfetta la corrispondenza fra la descritta corda Mo, ed una canna di figura simile ed uguale, vien essa turbata da una particolarità, che non si vuol trasandare. Insieme colla corda Mo si vibrano tutti i suoi elementi egualmente lunghi HK, le masse dei quali sono maggiori, o minori secondo l' indole della curva M N O. Sia collocata in B la bocca della canna Mo, da cui ha l' origine il suono, che si propaga da B verso A. Nello Schediasma VIII. dimostrerò che nell' aria si diffondono le vibrazioni non per settori sferici, ma bensì per linee, o raggi sonori. Quindi tanti raggi contandosi nella sezione N n, quanti nella M m, non oscilla tutta la massa aerea Mo, ma soltanto l' aggregato dei detti raggi, il quale è congruamente rappresentato dalla massa di una corda cilindrica, e non già da quella della corda Mo. Con ragione adunque nella canna Mo, non altrimenti che nelle cilindriche, ho espressa al numero XI. per lg la massa, che ha luogo nella determinazione del tuono.

 XV.

XV. Per sapere il numero delle vibrazioni, ch' io chiamo s, effettuate da una corda d' aria di data lunghezza l in un minuto secondo, fatta la riflessione, adempiersi l' equazione $s = \frac{1}{t} = \frac{2nb\sqrt{baG}}{cl\sqrt{g}}$ (3), e supponendosi, che la corda si vibri intera, onde sia $n = 1$, egli è d' uopo collocare nell' omogeneo di comparazione in cambio di $\frac{2b}{c}$, di b, e di $\frac{aG}{g}$ i convenienti valori. Il semicircolo diviso pel raggio, cioè $\frac{2b}{c}$ si adegua a $\frac{355}{113}$, e si sa essere la lunghezza b di un pendolo a secondi eguale ad once del piede di Parigi $36\frac{17}{24}$. Resterebbe da mettersi a computo la grandezza $\frac{aG}{g}$, o sia la proporzione fra il peso aG dell' atmosfera, e la densità g dell' aria: ma conciossiachè si potrebbe sbagliare nella determinazione della densità dell' aria pura, a cui soltanto si comunicano le vibrazioni sonore, della qual cosa ne parlerò exprofesso nello Schediasma VIII. e poichè ho dimostrato viaggiare il suono per lo spazio l nel tempo stesso, in cui una corda d' aria lunga quanto il detto spazio si vibra una volta; dedurrò dalla velocità del suono, resa nota coll' esperienza, il valore della totale quantità $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}}$.

C' insegnano le diligenti osservazioni fatte l' anno 1738. dai Signori Cassini di Toury, Maraldi, Abbate della Caille, scorrere il suono in un minuto secondo piedi Parigini 1038 equivalenti ad once 12456, nel qual tempo una corda aerea di pari lunghezza compierebbe una oscillazione. Essendo dunque $s = 1$, ne risulta $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}} = l = 12456$. Sostituito questo valore in vece di $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}}$ nella formola (3), scopriremo $s = \frac{12456}{l}$ (4), espressione semplicissima, da cui facilmente si

rac-

raccoglie il numero s delle vibrazioni, che nelle temperate stagioni del nostro clima effettua una corda d' aria di qualsivoglia lunghezza l in un minuto secondo.

XVI. Si deduce dalla nostra formola, che una corda d' aria lunga once $61\frac{1}{17}$ fa in un secondo vibrazioni 204. Il rinomato M. Sauveur ha con accuratissimi esperimenti scoperto, che una canna d' organo lunga once 60 fa in pari tempo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un' andata e di un ritorno, equivalenti a 204 calcolate conforme l' uso comune. Avendo io dimostrato nel numero III. che due corde d' aria unisone, una libera, e l' altra da una canna circondata, sono di eguale lunghezza; fa d' uopo dire, che a cagione di replicate riflessioni si segni dentro la canna una corda tortuosa, che sia once $1\frac{1}{17}$ più lunga della canna predetta; dimodochè la lunghezza della corda, e quella della canna stiano fra loro in ragione di $61\frac{1}{17}:60$, o prossimamente come $58:57$. Le pareti della canna impediscono, che il tremito sonoro non si comunichi all' aria, ch' esternamente tocca la canna medesima. Or ecco adunque che seguono innumerabili urti delle particole aeree contro i lati della canna, ai quali urti corrispondono altrettante riflessioni; ed effetto delle percosse, e delle ripercosse si è l' allungamento notato della corda d' aria rinchiusa nella canna.

Quando si tratta per tanto di ritrovare il numero delle vibrazioni, che fa una canna d' organo in un minuto secondo, bisogna avvertire, che dalla lettera l nella formola $s = \frac{12456}{l}$ vien dinotata non la lunghezza della canna, ma bensì quella della corda aerea, la quale si riferisce alla lunghezza della canna di piedi cinque, o sia d' once 60 in ragione di $58:57$. Questa proporzione si altera qualche poco nelle canne più lunghe, e più corte di cinque piedi, per cagione della dissimiglianza delle loro figure, meno crescendo, o scemando i diametri, di quello che crescano, o scemino le lunghezze; e quindi non dovremo maravigliarci, se le lunghezze, ed i tempi delle vibrazioni delle canne non si corrisponderanno nella stessa precisa scrupolosa ragione.

XVII.

XVII. La tortuosità delle corde d' aria contenute nelle canne si conferma evidentemente colle seguenti esperienze. Feci lavorare tre canne 1, 2, 3 (*Fig*: 26.) egualmente lunghe once 11, linee 2 $\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, e pari di diametro nel sito della bocca A B, dove si genera il suono. La prima canna era cilindrica, la seconda un frusto conico convergente, e la terza al contrario un frusto conico divergente. Il diametro C D della estremità della seconda canna era la metà del diametro C D = A B della prima, ed all' opposto la terza canna aveva il diametro C D doppio del diametro C D = A B della prima canna cilindrica. Suonando la canna convergente 2, dovranno entro la stessa seguire più riflessioni che nella canna cilindrica 1, e segnarsi conseguentemente in quella un' onda più lunga che in questa. Tutto a rovescio sottraendosi per dir così all' urto dell' aere le pareti della canna divergente 3, l' onda si segnerà meno tortuosa, e sarà più corta di quella, che nella canna cilindrica è contenuta. L' esperienza corrispose interamente all' aspettazione, ed essendo la prima canna unisona al B del mio stromento da tasto, trovai la seconda sonare il Bb, e la terza il C.

XVIII. Atteso che la prima canna è proporzionatamente più larga di una canna di cinque piedi, la sua lunghezza a quella della corda d' aria si riferirà in una proporzione alquanto più prossima di 57 : 58, che si adegua alla terza parte di un semituono all' in circa: ma la terza canna divergente è un semituono più acuta della prima canna cilindrica; dunque la corda di aria rinchiusa nella terza canna divergente è di essa canna più corta. Ora anche dentro sì fatta canna segnandosi tortuosa la corda d' aria, egli è manifesto che non terminerà alla estremità della canna, ma bensì alquanto al di dentro nel sito E; imperciocchè se così non fosse, la lunghezza della corda sarebbe maggiore di quella della canna.

Allora quando gli accordatori d' organo vogliono far crescere il suono d' una canna, ne allargano un miccino l' estremità, e succede lo stesso effetto, come se la canna un po si accorciasse. L' allargamento adunque opera sì, che la corda d' aria, finisca alquanto più abbasso. Ristretto un poco il diametro della estremità della canna, si aumentano le riflessioni, e crescendo la lunghezza della corda d' aria, il suono decresce. Di tale artificio si servono gli

gli accordatori per far calare una canna d' organo.

Che ſe l' apertura DC totalmente ſi ottura, il tremito ſonoro ſi rifletta nel coperchio DC, e tornando indietro trova l' uſcita per la bocca AB. Dentro una canna ſerrata per tanto ſi determina un' onda il doppio lunga di quella, ch' è contenuta dentro una canna aperta, e conſeguentemente la canna ſerrata corriſponderà in ottava grave alla canna aperta, conforme in fatti l' eſperienza c' inſegna.

XIX. Fatti ſuonare due differenti ſtromenti da fiato, come per eſempio un oboè ed un flauto, le lunghezze delle corde tortuoſe d' aria ſtaranno fra loro in ragione inverſa dei ſuoni dei nominati ſtromenti. Ma ſe le loro canne non ſi corriſponderanno nella medeſima proporzione, ciò dinoterà, che l' onde non ſi deſcrivono egualmente tortuoſe, e che forſe amendue non finiſcono alla eſtremità della canna. Oltre la varia figura delle canne, può eſsere cagione del primo effetto la diverſa maniera, colla quale ſi genera il ſuono. Spinto il fiato dentro la pivetta dell' oboè, ſi dilata eſsa, ed indi ſi comprime, ed il fiato concepiſce un tremito ſonoro avente una direzione aſsai traſverſale. Quindi non poco conſiderabile riuſcirebbe la tortuoſità dell' onda, ſe da un contrario elemento, cioè a dire dalla divergenza della canna, non veniſse modificata. Nel flauto tutto all' oppoſto poco tortuoſa ſi ſegna l' onda mediante l' artificio, con cui ſi produce il ſuono, ma non così adiviene per cagione della figura della canna, la quale ſiccome convergente, alla tortuoſità è favorevole. Nei due mentovati ſtromenti ſi contemperano in guiſa tale gli elementi contrarj, che conforme ho trovato cogli eſperimenti, la lunghezza dell' oboè a quella del flauto ſta in ragione inverſa dei ſuoni prodotti da eſſi ſtromenti.

Paragonando il ſuono di qualunque ſtromento da fiato con quello di una canna d' organo di cinque piedi, o d' once 60, riuſcirà facile il determinare la proporzione fra la lunghezza del corpo dello ſtromento, e della corda tortuoſa d' aria dentro lo ſteſſo rinchiuſa. Concioſſiachè l' armonia, che rendono i due ſuoni, manifeſta la relazione fra i tempi delle vibrazioni; facciaſi come il tempo d' una vibrazione della ſuddetta canna d' organo al tempo d' una oſcillazione dello ſtromento, così $61\frac{1}{17}$, lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la ſteſſa canna, al

al quarto termine proporzionale, che ſi eguaglierà alla lunghezza della corda aerea, che nel corpo dello ſtromento fa le ſue vibrazioni, la quale colla lunghezza d' eſſo corpo ſi può mettere agevolmente al confronto.

XX. Il ſopra lodato Signor Leonardo Eulero è ſtato il primo, che abbia dato al pubblico nell' opera altre volte citata (c) la formola, colla quale ſi determina il numero delle vibrazioni fatte da una canna d' organo in un minuto ſecondo. Ora in cambio d' indagare la proporzione fra le denſità del mercurio, e dell' aria ſonora, ſtabiliſce quella fra le denſità del mercurio, e dell' aria miſta colle particole eterogenee. Da ciò ne ſegue, che giuſta il ſuo computo ſi attribuiſce ad una data canna un numero di vibrazioni notabilmente minore di quello, che con accurate ſperienze ha ritrovato M. Sauveur. L' ignorare la verità, che il ſuono ſcorre la lunghezza di una corda d' aria nel tempo, in cui eſſa fa una vibrazione, ha dato motivo al notato sbaglio.

Secondo il Signor Eulero le denſità G, g del mercurio e dell' aria ſtanno fra loro nelle ſtagioni temperate come $11000 : 1$, e quindi $\frac{G}{g} = 11000$. Mediante il viaggio del ſuono ho ſcoperto al numero XV. $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}} = 12456$, formola da cui ſi deduce $\frac{c^2 \cdot \overline{12456}^2}{4b^2 \cdot ba} = \frac{G}{g}$: ma il raggio diviſo pel ſemicircolo, o ſia $\frac{c}{2b} = \frac{113}{355}$, la lunghezza b del pendolo a ſecondi ſi uguaglia ad once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi, e l' altezza media a del mercurio nel barometro ad once 28; dunque $\frac{\overline{113}^2}{\overline{355}^2} \cdot \frac{\overline{12456}^2}{36\frac{17}{24} \cdot 28} = 15294 = \frac{G}{g}$, e conſeguentemente le den-

(c) *Tentamen novæ Theoriæ Muſicæ* pag. 20.

densità G, g del mercurio, e dell' aria sonora si corrispondono nella ragione 15294 : 1. Il numero delle vibrazioni di una canna d' organo in un minuto secondo, che generalmente si esprime per $\frac{2b\sqrt{baG}}{cl\sqrt{g}}$, seguita la proporzione della grandezza $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$, supponendo costanti le quantità b, a, l. Avremo pertanto $\sqrt{15294} : \sqrt{11000} : : 204 : 173$, e l' ultimo termine dell' analogia c' insegna, che una canna di cinque piedi, la quale M. Sauveur ha trovato coll' esperienza oscillare 204 volte nel detto tempo, farebbe soltanto vibrazioni 173, se si dovesse introdurre nel calcolo la densità dell' aria mescolata colle particole eterogenee. Oltrechè questo troppo scarso numero di oscillazioni mal si concilia colla velocità del suono; non è verisimile, che un uomo così diligente come M. Sauveur abbia commesso l' errore di 31 vibrazioni in 204.

SCHEDIASMA VI.

Delle misure, che debbono assegnarsi alle corde d' uno stromento, ed alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

I. Acciocchè un musico stromento produca grata sensazione nell' organo dell' udito, non basta, che ciascun suono considerato da se solo sia dilettevole, ma bisogna altresì, che sieno forniti della stessa indole, e di egual forza. La seconda proprietà rende lo stromento uniforme, e fa sì che ogni suono meriti la medesima stima: la terza proprietà ottiene l' effetto, che, come si suol dire, un suono non copra l' altro, e del pari s' odano le voci gravi, ed acute. Darò principio dalle corde d' uno stromento, ed indi passerò alle canne d' organo, e stabilirò in quelle ed in queste le misure opportune, onde i loro suoni riescano aggradevoli, e vigorosi egualmente.

Determinare qual proporzione si debba assegnare alle dimensioni delle corde, acciocchè i loro suoni riescano del pari aggradevoli, e forti.

II. Le corde sonore vogliono esser tese sì fattamente, che per poco che si accresca la loro tensione, si rompano. Se due corde formate della stessa materia sieno differentemente grosse, correranno eguale pericolo di spezzarsi, quando le forze tendenti stiano in ragione delle grossezze; e quindi sì fatte corde di varia grossezza si debbono stirare con forze proporzionali alle loro basi. Il gagliardo distendimento delle corde rende viva, e spiritosa la palpitazione delle parti minime componenti esse corde, nella quale il suono principalmente consiste.

III. Ciò premesso, io mi servo del seguente giro di raziocinio. Abbiansi due corde A B, a b (*Fig.* 27.) della stessa materia, grossezza, e tensione, e differenti solo nella lunghezza, le quali compiuta una vibrazione si ripieghino talmente, che sieno le massime saette $CF = C$, $cf = c$. Dalla equazione delle curve A F B, a f b determinata nel numero IV. dello Schediasma IV. agevolmente si deduce, che segnate le assisse BH, bh, BK, bk proporzionali alle lunghezze delle corde BA, ba, sarà

sarà sempre HD : hd :: KE : ke :: CF = C : cf = c.

Giacchè BH :: bh :: BK : bk :: BA : ba, avremo parimente HK :: hk :: BA : ba. Sieno DE, de, che adequatamente s' eguagliano ad HK, hk due menome porzioni delle corde AFB, afb: poichè le nostre corde sono della stessa materia, e del pari grosse, le loro masse serbano la proporzione delle lunghezze BA, ba, ch' io chiamo L, l, e tale è altresì la relazione, che passa fra le masse degli elementi DE, de. Si osservi al numero XIV. del citato Schediasma IV. la formola delle velocità, che acquista una corda oscillando, e trattandosi di corde ugualmente tese, e grosse, e che oscillano intere, troveremo, che le velocità degli elementi DE, de, quando distano dalle linee rette BA, ba per ispazj proporzionali alle massime saette CF = C, cf = c, o ad esse linee son pervenuti, stanno in ragione composta, diretta delle nominate massime saette C, c, ed inversa delle lunghezze delle corde L, l, cioè a dire come $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Da tali velocità prendono norma quelle, che dalle infinitesime porzioni DE, de delle corde AFB, afb vengono impresse alle particole aeree, le quali, mentre sono lontane dal punto medio delle loro vibrazioni per distanze proporzionali alle grandezze C, c, si muovono con celerità, che accettano la ragione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$.

IV. Il numero de' raggi sonori cagionati nell' aere dal tremito degli elementi egualmente grossi DE, de è certamente proporzionale alle loro lunghezze DE, de, e conseguentemente alle lunghezze delle intere corde L, l. Conciossiachè questi raggi si spargono sfericamente all' intorno per ogni verso, egli è fuor di dubbio, che all' orecchio di chi ascolta il suono delle due corde ugualmente distanti ne giungerà una quantità relativa al numero intero d' essi raggi; laonde il numero de' raggi stimolanti il sensorio serberà la proporzione di $L : l$.

V. All' orecchio situato in O pervengano i due raggi sonori DO, dO. C' insegna la teorica della propagazione del suono contenuta nello Schediasma VIII. che le distanze fra due coppie di punti aerei G, O; g, O, frà quali i primi G, g compiuta una vibrazione sieno ridotti in quiete, ed i secondi O, O effettuata per esempio una mezza vibrazione sien pervenuti

alla massima velocità, sono proporzionali ai tempi delle oscillazioni delle corde AFB, afb: ma questi tempi stanno come le lunghezze d'esse corde L, l; dunque GO : gO :: $L : l$, e nella stessa proporzione altresì si riguarderanno le masse delle linee d'aria GO, gO. Se i punti estremi O, O dei raggi DO, dO urteranno nel timpano uditorio, resterà frastornato il moto delle linee aeree GO, gO, e quindi le porzioni delle masse dei raggi sonori DO, dO, che urtano nel sensorio, si riferiscono nella proporzione $L : l$. Si metta a computo il numero dei raggi, che provengono dagli elementi DE, de, e si troverà che le masse esercitanti impulso contro l'organo dell' udito stanno fra loro come $L^2 : l^2$.

VI. Abbiamo veduto che le velocità degli elementi aerei situati nei raggi DO, dO, mentr' essi elementi distano in ragione di $C : c$ dalla metà delle loro oscillazioni, accettano la proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Perciò i quadrati delle mentovate velocità saranno proporzionali a $\frac{C^2}{L^2}$, $\frac{c^2}{l^2}$. Immaginiamoci distribuite le linee GO, gO in pari numero di particelle MI, mi, le cui lunghezze abbraccieranno la ragione di GO : gO, o sia di $L : l$, supponendosi fra loro eguali le particelle alla stessa linea spettanti. Sia MO : mO :: GO : gO :: $L : l$, e dai canoni della propagazione del suono siamo istrutti, che le particole infinitesime MI, mi sono lontane come $C : c$ dal punto medio delle loro vibrazioni. Per conseguenza i quadrati delle loro velocità staranno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$: ma le masse delle particelle aeree MI, mi replicate tante volte, quanti raggi sonori posti in moto dagli elementi DE, de delle corde giungono al sensorio, si corrispondono come $L^3 : l^3$; dunque gli aggregati delle predette masse sono dotati di forze vive proporzionali a C^2, c^2. Potendosi la stessa cosa asserire di tutte le particole uguali ad MI, mi, e situate o più vicine al punto O, o più lontane, ma sempre

in

in diſtanze tali, che ſerbino la proporzione di GO: gO; ne ſegue, che per cagione delle porzioni minime DE, de delle corde AFB, afb l' aria urta nell' orecchio con forze vive in ragione di $C^2 : c^2$. Un ſimile effetto producono gli altri elementi delle noſtre corde ſimili nella lunghezza alle corde ſteſse, e ſimilmente collocati; e perciò le corde intere AFB, afb della ſteſsa materia, groſsezza, e tenſione, e ripiegate per le ſaette C, c ſpingono l' aria di forze vive fornita proporzionali ai quadrati di eſse ſaette contro l' organo dell' udito.

Replicandoſi queſti colpi eguali ad ogni nuova vibrazione delle due corde, egli è manifeſto, che l' impreſſione, che ne riceve l' orecchio, ſerba la proporzione compoſta dei quadrati C^2, c^2, e del numero delle vibrazioni fatte in tempo pari dalle due corde: ma il detto numero ſta inverſamente come i tempi, che in una oſcillazione s' impiegano, i quali tempi ſi riferiſcono nella ragione di $L:l$; dunque l' impreſſioni ſoſtenute dal ſenſorio accettano la proporzione $\frac{C^2}{L} : \frac{c^2}{l}$.

VII. Acciocchè divengano eguali le mentovate impreſſioni, egli è d' uopo moltiplicare il numero delle corde AFB, afb in ragione delle grandezze $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$, o pure con equivalente artificio far sì, che le groſſezze delle corde ſtiano come $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, e che le forze, o peſi tendenti P, p ſi riguardino colla ſteſſa proporzione. Le maſſe di tali corde, e conſeguentemente anche quelle degli elementi DE, de ſerbano la ragione $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$.

Mentre le due corde ſi ſupponevano di egual groſſezza, ho fatta l' oſſervazione, che gli elementi analoghi DE, de diſtanti dalle linee rette BA, ba in proporzione di $C:c$ ſi moveano con velocità in ragione di $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Lo ſteſſo ſi verifica di due corde inegualmente groſſe, ſtirate da peſi proporzionali alle lo-

ro groffezze, ed incurvate per le faette C, c; imperciocchè equivagono effe a due aggregati di corde di pari groffezza. Moltiplicando le maffe degli elementi DE, de, che ftanno come $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$, pe' quadrati delle rifpettive velocità, che ftanno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$, ne rifultano prodotti eguali, che dinotano l' eguaglianza delle forze vive degli elementi DE, de. Un fimile difcorfo fi adatti a tutte l' altre coppie di particole, nelle quali fi adempiano le medefime condizioni, onde vanno forniti gli elementi DE, de, e s' inferifca, che quando le corde AFB, afb, le cui groffezze fi corrifpondano nella proporzione delle grandezze $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, diftano come $C : c$ dalle linee rette AB, ab, vengono da pari forze vive animate.

VIII. Dovendofi quefte corde nelle ofcillazioni loro allontanare in fiti analoghi ED, ed dalle linee rette AB, ab in ragione di $C : c$, impareremo dal numero VII. dello Schediafma IV. che gli elementi DE, de fono ftimolati da forze acceleratrici, che ftanno come $\frac{CP}{LM} : \frac{cp}{lm}$, chiamate M, m le maffe delle due corde. Si moltiplichino le dette quantità per M, m, grandezze proporzionali alle maffe degli elementi DE, de, e ci fi affaccieranno le frazioni $\frac{CP}{L}$, $\frac{cp}{l}$, ch' efprimeranno la ragione delle forze follecitanti le particelle DE, de: ma per la ftabilita analogia $P : p :: \frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$; dunque foftituendo in cambio di P, p le grandezze proporzionali $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$, troveremo, che gli elementi DE, de, le cui diftanze dai punti eftremi B, b feibno la proporzione delle lunghezze AB, ab delle corde, foftengono le follecitazioni di forze, che ftanno inverfamente co-

me

me le massime saette CF, cf delle corde stesse, cioè a dire come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$.

IX. Raccogliendo in poche parole le cose diffusamente spiegate, dico, che due corde della stessa materia, incurvate oscillando fino alle massime saette C, c, tese da pesi proporzionali alle grossezze, e grosse in ragione di $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, vengono stimolate in siti analoghi da forze sollecitanti come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$, sono fornite di pari forze vive, e producono suoni egualmente forti.

X. Resta, che si determini la proporzione, in cui si deggiono riferire le massime saette C, c, acciocchè i suoni delle corde A B, a b riescano del pari aggradevoli. Io stabilisco due limiti, fuori dei quali non si dee certamente svagare, cioè a dire che la corda grave non sia più sottile dell'acuta, e che questa non trascorra oscillando uno spazio maggiore di quello, per cui si move la corda grave.

Se da un canto le due corde sono egualmente grosse, si avrà $\frac{L}{C^2} = \frac{l}{c^2}$, e per conseguenza $C:c::\sqrt{L}:\sqrt{l}$, cioè le massime saette C, c in ragione dimezzata delle lunghezze L, l delle corde. In questo incontro le grossezze delle nostre corde stanno come $L^2 : l^2$. Nomino T, t i tempi delle vibrazioni delle corde A B, a b, ed U, u le velocità degli elementi D E, d e, mentre le distanze loro dalle linee rette B A, b a serbano la ragione di $C : c$. Abbracciando le dette velocità la general proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$, se in cambio di C, c sostituiremo le grandezze nel caso presente proporzionali $\sqrt{L}, \sqrt{l}$, troveremo $U : u :: \frac{1}{\sqrt{L}} : \frac{1}{\sqrt{l}}$: ma rispettivamente a corde tese da pesi in ragione delle basi i tempi T, t delle oscillazioni si riguardano come $L : l$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, cioè a dire le descritte

velo-

velocità delle due corde in proporzione inversa dimezzata dei tempi T, t delle vibrazioni.

XI. Passo al limite opposto, e suppongo $C = c$. In tale circostanza si scopriranno le grossezze delle corde $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$ proporzionali alle lunghezze L, l: canone stabilito dal celebratissimo Signor Leonardo Eulero nella sua opera *Tentamen novae Theoriae Musicae* pag. 11. In riguardo alle velocità U, u s' adempierà l' analogia $U : u :: \frac{1}{L} : \frac{1}{l} :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$, la quale c' insegnerà, ch' esse accettano la ragione reciproca o delle lunghezze L, l delle corde, o dei tempi T, t delle loro vibrazioni.

XII. In quegli stromenti, ne' quali assegnandosi a ciascun suono la sua corda particolare, c' è un pieno arbitrio, l' arte si tiene di mezzo fra i due confini estremi. Di tal natura sono i gravicembali, che nel numero XVII. e ne' seguenti mi serviranno d' esempio.

XIII. Non lasciano la scelta libera gli stromenti, in cui una corda stessa rende più suoni, e ciò col mezzo delle dita della mano sinistra, che in diversi siti la premono. La pressione accorcia più, o meno la corda, e fa sì, che più corde differenti solo nella lunghezza producan suono. Egli è d' uopo adunque ricorrere al limite in primo luogo ricordato, se vogliamo, che i varj suoni cagionino nell' orecchio una impressione ugualmente forte. Nel violino a cagion d' esempio la corda intera, e le sue porzioni di lunghezza diversa determinate dal dito premente acquistano pari forze vive MU^2, mu^2 per motivo della costante azione dell' arco. Avremo per tanto $U : u :: \frac{1}{\sqrt{M}} : \frac{1}{\sqrt{m}}$: ma essendo le corde ugualmente grosse, e tese, $M : m :: L : l :: T : t$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, conforme ricerca il limite nominato.

XIV. Benchè abbia sopra supposto ai numeri II. e VII. che le forze tendenti sieno proporzionali alle grossezze delle corde; se procedendo con maggior generalità non avessi ristretti i pesi stiranti alla detta legge, nulladimeno con un simile giro di raziocinio sarei pervenuto alla conseguenza, che due corde fornite di egua-

eguali forze vive rendono suoni egualmente forti. In fatti i suoni del violino prodotti da corde animate, come vedremo, da eguali forze vive riescono di pari vigore, quantunque le forze tendenti non serbino la ragione delle grossezze delle corde. Ho abbracciata la nominata ipotesi, perchè questa dee verificarsi almeno prossimamente negli stromenti più perfetti, ne' quali le speciali circostanze non obbligano gli artefici a regolarsi diversamente.

XV. Faccio ritorno al violino, e giacchè il nostro stromento è guernito di quattro corde ugualmente lunghe, e variamente grosse, stimo opportuna cosa l' indagare qual proporzione debba assegnarsi alle diverse grossezze, acciocchè passando da corda a corda si conservi la legge $V:u::\frac{1}{\sqrt{T}}:\frac{1}{\sqrt{t}}$, e ritenendo i suoni la stessa indole, l' orecchio non s' accorga, che il suono piuttosto da una corda che dall' altra provenga.

Egli è d' uopo premettere, che quantunque l' arco tocchi una maggior superficie nelle corde più grosse, nulladimeno la sua azione è costante, purchè si usi pari forza a premer l' arco sopra le corde. Questa forza si distribuisce ugualmente a tutte le parti toccate, e quindi due particelle uguali in corde differenti soffrono pressioni in ragione inversa delle totali superficie combaciate dall' arco. Facendo l' arco suonare le corde col mezzo del fregamento, ed essendo questo in proporzione composta della pressione sostenuta da particole uguali, che sta reciprocamente come le intere superficie, e del numero d' esse particole, che sta direttamente come le intere superficie; ne segue che il fregamento è pari rispettivamente a tutte le corde, e che l' azione dell' arco è costante.

Ciò dimostrato, egli è chiaro, che le diverse corde concepiranno eguali forze vive MV^2, mu^2, onde s' abbia $V:u::\frac{1}{\sqrt{M}}:\frac{1}{\sqrt{m}}$: ma si vuole parimente, che si verifichi l' analogia, $V:u::\frac{1}{\sqrt{T}}:\frac{1}{\sqrt{t}}$; dunque $M:m::T:t$. E poichè nel caso presente le masse delle corde, che sono della stessa materia, ed egualmente lunghe, serbano la ragione delle grossezze, troveremo, che queste debbono riferirsi nella ragione dei tempi delle vibrazioni.

Due corde proſſime del violino formano quinta, e perciò $M : m :: T : t :: 3 : 2$, proporzione, in cui hanno da corriſponderſi le groſſezze di due corde vicine nel mentovato ſtromento.

XVI. La ſeguente ſperienza ci additerà, qualmente ſi conformi la pratica alla teorica. Colle bilancette dell' oro peſai tre porzioni egualmente lunghe piedi $1 \frac{1}{2}$ Veneziani delle tre corde del violino, che ſi chiamano il tenore, il canto, ed il cantino. Tralaſciai d' indagare il peſo della corda più grave; perchè queſta non è come l' altre di ſola minugia, ma ſuole circondarſi con un ſottil filo di rame. Peſò adunque il tenore grani 15, il canto grani 10, ed il cantino grani 6. Eſſendo le corde del pari lunghe, le groſſezze ſtanno come i peſi: le groſſezze per tanto del tenore, e del canto ſi corriſpondevano eſattamente nella ragione $3 : 2$. Le groſſezze del canto, e del cantino ſi avvicinavano ad una tale proporzione, la quale ſi ſarebbe trovata giuſta, ſe il cantino aveſſe peſato grani $6 \frac{2}{3}$ in cambio di grani 6. Trattandoſi di corde di minugia, che ſono ſoggette a moltiſſime imperfezioni, io non credo, che ſi poſſa pretendere fra la teorica, e la pratica più aggiuſtata conformità, e ciò tanto più, quanto il cantino, ſiccome mi aſſeriva un perito Sonatore, era un po troppo ſottile.

XVII. Mi accingo preſentemente a provare, che le corde dei gravicembali acquiſtano oſcillando eguali forze vive, e che di più le loro groſſezze, e velocità accettano una ragione media, quelle fra $L^{o} : l^{o}$, $L : l$; e queſte fra $\frac{1}{\frac{1}{L^2}} : \frac{1}{\frac{1}{l^2}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$.

Per far ſuonare le corde dei noſtri ſtromenti, s' uſano penne a un di preſſo egualmente rigide, e s' adopra in oltre l' artificio d' incitare le corde gravi al moto in ſito più proſſimo all' appoggio di quello porti la proporzione delle loro lunghezze. Si rende adunque neceſſario il determinare le faette cagionate da una forza minima, la quale s' applichi a qualunque punto d' una data corda.

XVIII. La forza DC (*Fig.* 28.), la cui direzione ſia normale alla retta AB, ſtia in equilibrio colla corda ADB,

e la

e la tenga talmente ripiegata, che il punto D si allontani dalla linea AB per la saetta DH, di cui si cerca il valore. Continuo indefinitamente la linea BD, e pel punto C conduco la linea CG parallela a DA, la quale taglierà la retta BD nel punto G. Per un tal punto meno GE parallela ad AB, e conseguentemente perpendicolare a CH. La forza DC si risolve nelle due DG, GC, che tirano direttamente, quella la corda BD, e questa la corda AD. In oltre la forza DG è composta delle due equipollenti DE, EG, l'una normale, e l'altra parallela ad AB. Avverto, che supponendosi minima la forza DC, non si altera fisicamente la tensione della corda, e perciò EG si adegua alla forza tendente la detta corda AB, mentre si trova in linea retta. Non altrimenti la forza GC equivale alle due EC, EG. La prima unita alla DE pareggia la forza DC, e la seconda l'ho già affermata eguale al vigore tendente la corda AHB.

XIX. Per la similitudine dei triangoli DEG, DHB; CEG, DHA avremo le analogie

$$GE : ED :: BH : HD = \frac{ED.BH}{GE},$$

$$GE : EC :: AH : HD = \frac{EC.AH}{GE}.$$

Si deduca essere $ED.BH = EC.AH$, equazione da cui si ricava l'analogia $ED : EC :: AH : BH$, la quale c'insegna, che le forze ED, EC opponentisi, quella alla corda BD, questa alla corda AD, stanno tra loro in ragione inversa delle lunghezze BH, AH d'esse corde, mentre la corda intera AB si ritrovava in linea retta.

Conciossiachè $ED : EC :: AH : BH$, avremo componendo $ED + EC = DC : EC :: AH + BH = AB : BH$, e perciò $EC = \frac{DC.BH}{AB}$. In cambio di EC si sostituisca il suo valore nella superior equazione $HD = \frac{EC.AH}{GE}$, e scopriremo essere $HD = \frac{DC.BH.AH}{AB.GE}$. La stessa conseguenza s'incontrerebbe cercando prima il valore di $ED = \frac{DC.AH}{AB}$, e sostituendolo poscia nella formola $HD = \frac{ED.BH}{GE}$.

Si chiami la lunghezza della corda AB $=L$, la forza tendente GE $=P$, la forza DC $=F$, la faetta HD $=S$, la porzione della corda BH $=KL$, il refiduo AH $=L-KL$, e ci fi prefenterà l' equazione $S=\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}=\frac{\overline{K-K^2}.FL}{P}$, la qual efprime il valore della faetta S corrifpondente alla forza F applicata a qualfifia punto H della corda AB.

XX. Se BH $=KL$ fi eguaglierà ad $\frac{1}{2}L$ metà della corda AB, la faetta HD $=S$ farà la maffima. Senza ricorrere al metodo dei maffimi, e dei minimi, fi offervi nella formola $S=\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, che in riguardo alla fteffa corda la quantità $\frac{F}{LP}$ è coftante, e che per confeguenza il valore di S è proporzionale al rettangolo $KL.\overline{L-KL}$, cioè a dire al rettangolo BHA: ma i rettangoli BHA hanno coftante la fomma BH $+$ HA $=L$ dei lati, che li producono, e fra sì fatti rettangoli il maffimo fi è quello, che nafce dalla moltiplicazione dei lati eguali BH, HA; dunque il maffimo valore di S corrifponderà al punto medio H della corda AB.

Se il punto H coinciderà o coll' uno, o coll' altro punto eftremo B, A, onde o BH $=KL$, o HA $=L-KL$ s' eguagli a nulla, farà parimente nulla la faetta HD $=S$.

Perfiftano coftanti la lunghezza, la tenfione della corda AB, il punto H, in cui fi ftimola al moto, e troveremo le faette proporzionali alle forze.

Paragonate infieme parecchie corde, fe i punti H, a cui s' applicano le penne, faranno analoghi, dimodochè BH $=KL$ fia fempre una fimile porzione della lunghezza AB $=L$, la fpecie K avrà un valore coftante. Data K, farà parimente data la quantità $K-K^2$, e perciò le faette S fi fcopriranno come $\frac{FL}{P}$. Incitate adunque al tremito due corde in fitl analoghi, le faette ftanno in ragione compofta, diretta delle forze F, con cui fi ftimolano, e delle lunghezze L, ed inverfa delle forze tendenti P.

Che

Che se in oltre si assumerà costante la forza F, si troverà S proporzionale ad $\frac{L}{P}$, cioè a dire le saette direttamente come le lunghezze, e reciprocamente come le forze tendenti.

XXI. Sino a tanto che la resistenza della corda è minore della rigidità della penna, seguita questa a vie più ripiegarla. Giunte tali forze alla egualità, o per meglio dire superando la resistenza della corda per una quantità minima la rigidità della penna, si mette subito la corda in oscillazione. Perciò la resistenza della corda ADB si eguaglia alla forza $DC = F$. Segno $DI = DC = F$ perpendicolare a DH, e condotta la diagonale HI, da qualunque punto O medio fra D, ed H, descrivo ON parallela a DI. Avendo provato, che, sendo il resto pari, le saette serbano la ragione delle forze, chiaramente si scopre che per piegare la nostra corda fino alla saetta HO, si richiede la forza ON: ma, siccome ho testè fatta la riflessione, la resistenza della corda nella positura AOB pareggia la forza ON; dunque il triangolo HDI è la scala delle resistenze della corda, ed all' aja d' esso triangolo s' eguaglia la reazione esercitata dalla corda, mentr' è passata dalla linea retta AHB alla situazione ADB. Quantunque la corda messa in libertà non mantenga la figura triangolare ADB, AOB, nulladimeno ritornata che sia alla linea retta AHB ha effettuata una somma di azioni eguale alla predetta reazione, o sia all' aja HDI, a cui per conseguenza si eguaglia la forza viva acquistata. E giacchè l' aja HDI è proporzionale al prodotto $ID.DH = FS$, ne segue, che la nominata forza viva serba la ragione di FS. In cambio di S si sostituisca il valore sopra determinato $\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, e si troverà essere la forza viva della corda AHB ritornata in linea retta come $\frac{F^2.KL.\overline{L-KL}}{LP}$.

Abbiasi un'altra corda ab, rispettivamente a cui sia $ab = l$, $bh = kl$, $ah = l - kl$, $dc = f$, la forza tendente $= p$, e la sua forza viva nell' istante che ha fatto ritorno alla linea retta ahb sarà proporzionale ad $\frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$.

XXII.

XXII. Acciocchè le due corde rendano suoni egualmente forti, fa d' uopo, che uguagliandosi le loro forze vive, si verifichi l' equazione $\frac{F^2 . KL . \overline{L - KL}}{LP} = \frac{f^2 . kl . \overline{l - kl}}{lp}$.

Adoprata in riguardo ad ambo le corde la stessa forza, cioè a dire sendo $F = f$, vale la formola $\frac{KL . \overline{L - KL}}{LP} = \frac{kl . \overline{l - kl}}{lp}$.

Finalmente stimolate le corde con pari forze in siti analoghi, onde sia $K = k$, l' equazione prende il semplice aspetto $\frac{L}{P} = \frac{l}{p}$, dal quale apprendiamo, che in tali circostanze le corde concepiranno eguali forze vive, e produrranno suoni egualmente forti, quando le forze tendenti P, p accettino la ragione delle lunghezze L, l. Si aggiunga la condizione, che le forze stiranti sieno proporzionali alle grossezze delle corde, e ne risulterà il canone stabilito dal Signor Eulero, che le grossezze delle corde debbano corrispondersi nella ragione delle lunghezze. Per verità il lodato Autore ha supposto, senza consultare la pratica, che in punti analoghi si faccian suonare le corde. Accoppiata questa ipotesi colle altre due comprovate almeno prossimamente dall' uso, che le forze incitanti al tremito sieno eguali, e che le tensioni sieno come le grossezze delle corde, ci guida necessariamente al canone mentovato, quando sia nostra mira, che le corde ugualmente vigorosi rendano i suoni.

XXIII. Discendendo dalla teorica alla pratica, osservo, che le lunghezze delle corde $AB = L$, $ab = l$, le distanze $BH = KL$, $bh = kl$ fra l' appoggio, e la penna, che fa suonare, le distanze $HA = L - KL$, $ha = l - kl$ fra la penna, e l' altro appoggio si rendono esattamente note con diligente misura. La legge dei tempi delle vibrazioni delle corde espressa dall' analogia $\frac{LM}{P} : \frac{lm}{p} :: T^2 : t^2$ serve a scuoprire la proporzione fra le forze tendenti $P : p :: \frac{LM}{T^2} : \frac{lm}{t^2}$.

La ragione fra le masse delle corde si trova pesandole, e la relazione fra i tempi T, t ci è resa palese dall' armonia, che producono le due corde suonando, la quale gioverà molto che sia

sia una equisonanza, cioè a dire un' ottava semplice, o multipla; perchè sendo queste perfettamente accordate nei gravicembali, ne sappiamo la vera puntuale proporzione.

Le forze F, f, con cui si fanno suonare le corde, le determinaremo col calcolo, e dandocele adequatamente uguali, siccome l' uso richiede, caveremo a buon conto la conseguenza, che le dette corde acquistano oscillando eguali forze vive, e che perciò producono suoni egualmente forti.

Le relazioni fra le grossezze delle corde, fra le loro velocità, dalle quali dipendono i suoni del pari grati, le anderò opportunamente notando, secondochè mi si presenterà l' occasione.

XXIV. In un gravicembalo lavorato da Vito de' Traluntini l' anno 1559 due corde suonavano il C sol fa ut, e si corrispondevano in tripla ottava, rispettivamente a cui i tempi T, t delle vibrazioni delle due corde stanno come $8:1$, ed i loro quadrati $T^2 : t^2 :: 64 : 1$.

Trovai $L =$ once $33 - \frac{1}{6}$, $l =$ once $4 + \frac{1}{4}$, le quali misure sono espresse in once del piede Veneto. Moltiplicando, e dividendo il tutto per 12, ne risulta $L = \frac{394}{12}$, $l = \frac{51}{12}$, cioè a dire tralasciato il comun divisore 12, $L : l :: 394 : 51$, proporzione fra le lunghezze delle corde ridotta a numeri interi. Noto che la ragione di $L : l :: 394 : 51 :: 7 + \frac{37}{51} : 1$ è più vicina di quella fra i tempi delle vibrazioni $8 : 1$.

Cinque piedi della corda grave pesavano grani 20, ed altrettanti piedi della corda acuta pesavano grani 6, e perciò le grossezze delle corde si corrispondevano nella proporzione di $10 : 3$, o sia di $3 \frac{1}{3} : 1$, la quale è media fra le due di limite sopra determinate $L^0 : l^0$, $L : l$, e molto si accosta alla seguente $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$, conforme coll' ajuto dei logaritmi si può accertare chi legge.

Stando le masse delle corde della stessa materia in ragion composta del-

delle loro lunghezze e grossezze, scopriremo essere $M:m::3940:153::25\frac{115}{153}:1$.

Nell' analogia $P:p::\frac{LM}{T^2}:\frac{lm}{t^2}$ sostituisco in vece di L,l; M,m; T,t i ritrovati proporzionali valori, e mi si presenta la ragione tra le forze tendenti $P:p::\frac{1552360}{64}:7803$, o sia $P:p::194045:62424::3+\frac{6773}{62424}:1$. La frazione $\frac{6773}{62424}$ decresce pochissimo da $\frac{1}{9}$, e quindi prossimamente $P:p::3+\frac{1}{9}:1$. Si osservi la forza $3+\frac{1}{9}$ stirante la corda grave alquanto minore di quello richiede la proporzione della sua base $3+\frac{1}{3}$, e si cavi la conseguenza, che le fibre della corda grave erano un po meno tese delle fibre della corda acuta.

M' insegnò in oltre la misura $KL=$ once $4=\frac{48}{12}$, $kl=$ once $1\frac{3}{4}=\frac{21}{12}$, e perciò ommesso, qualmente si è fatto anche rispettivamente alle totali lunghezze L, l, il comune divisore 12, $KL:kl::48:21$. Avverto essere $L-KL:l-kl::394-48=346:51-21=30$.

XXV. Nella formola $\frac{F^2.KL.\overline{L-KL}}{LP}=\frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$ pongasi $L=394$, $KL=48$, $L-KL=346$,
$l=51$, $kl=21$, $l-kl=30$,
$P=194045$, $p=62424$, ed adempiuti i necessarj computi, si troverà $\frac{F^2}{1337940275}=\frac{f^2}{1468711872}$, ed estratta la radice quadrata, $\frac{F}{36577}=\frac{f}{38323}$, cioè prossimamente $F:f::21:22$. Ecco adunque effettuata la condizione suggeritaci dal-

ci dalla sperienza, che le forze F, f fieno proffimamente uguali. Resta confermato per tanto, che le corde gravi, ed acute di un gravicembalo rendono suoni del pari forti, perchè nell' oscillare di eguali forze vive fanno l' acquisto. All' adempimento più, o meno esatto d' una tal legge corrisponderà in riguardo all' egual vigore de' suoni la maggiore, o minore perfezione dello stromento. Se la grossezza della corda grave si fosse trovata $3\frac{2}{3}$ in cambio di $3\frac{1}{3}$, ne sarebbe risultata dal calcolo una perfetta eguaglianza delle forze F, f.

XXVI. Giacchè le nostre corde di pari forze vive sono fornite, le loro velocità staranno inversamente come le radici delle masse, onde s' abbia $V : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$: ma le masse si riferiscono nella ragione composta delle lunghezze e delle grossezze di esse corde, e le grossezze le abbiamo scoperte come $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$; dunque $M : m :: L^{\frac{19}{12}} : l^{\frac{19}{12}}$, e conseguentemente $V : u :: \frac{1}{L^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{l^{\frac{19}{24}}}$: proporzione, che sta quasi esattamente di mezzo fra quelle di limite sopra stabilite $\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$. Avendoci mostrato il computo al numero XXIV. $M : m :: 25\frac{115}{153} : 1$, c' insegna altresì essere $V : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} :: \frac{1}{5\frac{115}{1530}} : 1$; cioè a dire le velocità di due corde, grave ed acuta, che si corrispondono in tripla ottava, proffimamente come $1 : 5$.

XXVII. Non vogliono trascurarsi alcune riflessioni importanti. In tutti i gravicembali, e le spinette da me esaminati, poste al paragone le corde gravi colle acute, le ho trovate al-

quanto più corte di quello richiede la proporzione dei tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne deriva la conseguenza, che le corde gravi rispettivamente alle loro grossezze sono un po meno tese delle corde acute. Io credo, che i pratici così si adoperino, perchè la trafila, per cui si fanno passare le corde, costipi e renda tenaci più le sottili delle grosse, dimodochè queste non possano tollerare la tensione di una forza alle loro grossezze precisamente proporzionale. Corrono in oltre pericolo le corde gravi di scavezzarsi, mentre si attorcigliano per attaccarle allo stromento, e si rivolgono intorno al perno, col mezzo del quale si stirano. Per altro sfuggiti i descritti rischj, e ridotte alla dovuta tensione, si conservano molto tempo senza spezzarsi. Le corde acute all' opposto durano poco, e si rompono facilmente.

XXVIII. Usandosi per far suonare le corde forze a un di presso costanti, le corde gravi per lo stiramento dalla penna prodotto sono meno prossime a rompersi delle acute. Egli è noto, che due corde tese con pesi proporzionali alle loro tenacità s' espongono a pari cimento di spezzarsi, quando gli allungamenti cagionati dalle forze F, f serbano la ragione delle lunghezze d' esse corde. Considero (*Fig.* 28.) le porzioni meno lunghe BH, bh delle corde AB, ab, perchè agendo contro d' esse una parte della forza DC, dc maggiore di quella, che si esercita contro le porzioni più lunghe AH, ah, le prime si scavezzano più facilmente delle seconde. Fatto centro nei punti B, b, coi raggi BH, bh si descrivano gli archi HQ, hq, i quali determineranno le lineette DQ, dq eguali alle distensioni sofferte dalle corde BH, bh. Giacchè si vuole, che i mentovati allungamenti stiano come le lunghezze $BH = KL$, $bh = kl$, saranno parimente come le dette lunghezze le saette $\overline{HD}$, $\overline{hd}$, i di cui quadrati s' eguagliano ai rispettivi rettangoli $\overline{2BQ + QD} . QD$, $\overline{2bq + qd} . qd$. Prendo per mano le formole, che generalmente esprimono i valori delle saette $S = \frac{F . KL . \overline{L - KL}}{LP}$, $s = \frac{f . kl . \overline{l - kl}}{lp}$, le quali c' insegnano, che allora s' adempierà l' analogia $S : s :: KL : kl$, quando sia $\frac{F . \overline{L - KL}}{LP} = \frac{f . \overline{l - kl}}{lp}$. Sostituisco in cambio di $L - KL$, L, P; $l - kl$, l, p i convenienti valori sopra determinati, ed effet-

effettuate le debite operazioni, mi si presenta l'analogia $F:f::382268650:183588984$, che si approssima alla seguente $F:f::2\frac{1}{12}:1$.

Se adunque le forze F, f, che fanno suonare le due corde grave ed acuta, le quali nel mentovato stromento del Trasuntini si corrispondono in tripla ottava, fossero come $2\frac{1}{12}:1$, gli allungamenti QD, q d delle porzioni meno lunghe BH, b h di esse corde accetterebbero la ragione delle lunghezze BH, b h delle dette porzioni, che perciò correrebbero egual rischio di rompersi, purchè per altro le due corde, come io suppongo, fossero del pari allo spezzarsi proclivi, prima che le penne le stimolassero al tremito. Ma per incitare al suono le due corde si adoprano forze fisicamente uguali, e la corda grave è proporzionatamente meno tesa dell' acuta; dunque è molto rimoto il pericolo, che si scavezzi la corda grave nell' atto di porla in oscillazione.

XXIX. Non è arbitrario l' armare uno stromento con corde di qualunque grossezza, ed armato che sia l' usar forze a capriccio per far suonar esse corde. L' esperienza uniforme alla teorica ha insegnato ai pratici le convenienti grossezze delle corde gravi ed acute, le quali surrogando il prossimo all' esatto, ponno stare dentro certi discreti limiti. Applicate allo stromento due corde di congrua grossezza, resta l' altro mezzo della forza delle penne, per interamente pareggiare il vigore dei suoni. Toccando gli accordatori nello stesso tempo due corde, comprendono esattamente qual penna debba accrescersi, o scemarsi di forza, acciocchè i due suoni grave ed acuto facciano nell' orecchio eguale impressione.

Determinare le misure, che debbono assegnarsi alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

XXX. Colla scorta delle verità poste in chiaro rispettivamente alle corde si determinano agevolmente le misure, che debbono assegnarsi alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari

 for-

forti, e aggradevoli. La stessa analogia $T : t :: \sqrt{\frac{LM}{P}} : \sqrt{\frac{lm}{p}}$ dà legge ai tempi delle vibrazioni e delle corde sonore, e delle canne d' organo. In riguardo a quest' ultime significano L, l le lunghezze delle corde d' aria rinchiuse nelle canne, le quali corde mi giova per ora il supporle o rettilinee, o similmente tortuose, onde le loro lunghezze o eguali sieno, o proporzionali a quelle delle canne misurate dalla bocca fino alla estremità superiore. M, m, dinotano le masse delle mentovate corde, e P, p i pesi delle colonne d' aria soprastanti alle canne, i quali colle loro pressioni rendono elastiche le nostre corde. Nella medesima stagione, e costituzione d' aria i pesi P, p stanno come le grossezze, o basi delle corde aeree contenute nelle canne, e le dette basi come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$. Sostituiti per tanto nella soprascritta analogia sì fatti valori proporzionali in cambio di P, p, troveremo $T : t :: L : l$, cioè a dire nelle addotte circostanze i tempi delle vibrazioni di due canne d' organo come le lunghezze L, l delle corde aeree da esse canne comprese.

XXXI. I numeri delle funicelle aeree di pari grossezza, che dentro le canne si pongono in oscillazione, seguono la ragione delle basi $\frac{M}{L}$, $\frac{m}{l}$ delle corde d' aria circondate dalle pareti delle canne, e la stessa analogia parimente accettano i numeri de' raggi sonori, che si diffondono sfericamente intorno le canne, i quali raggi altro non sono, che una continuazione delle cordicelle or ora nominate. Le quantità dei raggi sonori, che pervengono all' udito egualmente dalle due canne distante, sono proporzionali ai numeri totali d' essi raggi, e per conseguenza stanno come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$.

XXXII. Per le cose dimostrate al numero V. le masse di due raggi sonori spettanti a due canne, che urtano nell' orecchio, si riferiscono nella ragione di $T : t$, o sia nel nostro caso di $L : l$. Moltiplicando adunque le masse come $L : l$ di ciascun raggio, che colpisce il sensorio, pel numero de' raggi come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$, che nello stesso fanno impressione, ne risulta la re-

lazio-

lazione $M:m$ fra le intere masse, che contro l' organo dell' udito si muovono, le quali sono proporzionali alle masse delle corde aeree contenute dentro le canne.

XXXIII. I suoni riescono egualmente forti, allora quando l' aria urta nell' orecchio con forze vive in ragione di $T:t$, che in riguardo alle canne d' organo si eguaglia a quella di $L:l$; imperciocchè moltiplicandosi gl' impulsi secondo i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari, i quali stanno come $\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$, ne risultano nel sensorio eguali impressioni. Si chiamino U, u le velocità in siti analoghi, e per esempio le massime, che prima dentro alle canne, ed indi al di fuori acquistano oscillando le particole aeree, e giusta quanto si è provato, l' aria colpirà il sensorio con forze vive proporzionali ad Mu^2, mu^2: ma queste forze deggiono abbracciare la relazione $L:l$, dunque $MV^2:mu^2::L:l$, e conseguentemente $\sqrt{\frac{M}{L}}:\sqrt{\frac{m}{l}}::\frac{1}{V}:\frac{1}{u}$. Le quantità $\frac{M}{L}$, $\frac{m}{l}$ dinotano le grossezze, o basi delle corde d' aria contenute dentro le canne, e le loro radici si riferiscono nella ragione dei diametri d' esse corde, o pure delle canne, ch' io nomino D, d. Avremo per tanto $D:d::\frac{1}{V}:\frac{1}{u}$, e ne ricaveremo, che i diametri delle canne d' organo debbono corrispondersi nella proporzione reciproca delle velocità V, u, colle quali l' aria si vibra agitata dal fiato, che fa suonare le canne.

XXXIV. Se le forze del fiato si esprimano per F, f, comprimeranno l' aria nelle canne rinchiusa per ispazj come $\frac{FL}{D^2}:\frac{fl}{d^2}$. Le azioni di tali forze proporzionali alle forze vive MV^2, mu^2 accetteranno la relazione $\frac{F^2L}{D^2}:\frac{f^2l}{d^2}$, e giacchè $Mu^2:mu^2::L:l$, sarà parimente $\frac{F^2L}{D^2}:\frac{f^2l}{d^2}::L:l$; analogia,

da

da cui si deduce $F:f::D:d$, cioè a dire, che le forze del fiato hanno da riferirsi nella ragione dei diametri delle canne.

XXXV. Ricavasi dalla sperienza contenuta nei numeri XXIV. e XXV. che si conforma colla teorica, e dai discorsi espressi nei numeri precedenti, che le corde d' un gravicembalo del Trasuntini, i cui suoni riuscivano egualmente grati, spingeano contro l' orecchio masse d' aria proporzionali a $T^{\frac{31}{12}}$, $t^{\frac{31}{12}}$ con velocità in ragione di $\frac{1}{T^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$. Questo canone o esattamente, o prossimamente dee valere in tutti gli stromenti perfetti, nei quali le circostanze particolari non astringono gli artefici ad operare diversamente. Si riflette, che i suoni vengono sempre portati all' orecchio dall' aere, e che non c' è motivo, per cui quella tal proporzione fra la massa aerea, che colpisce il sensorio, e la velocità, con cui lo colpisce, piaccia in un caso, e nell' altro no. Avendo dimostrato essere le masse dell' aria, che agitate dalle canne d' organo urtano nell' orecchio, come $M:m$, o sia come $LD^2:ld^2$, e di più $T:t::L:l$, $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}$, ne dedurremo le analogie $M:m::LD^2:ld^2::TD^2:td^2::T^{\frac{31}{12}}:t^{\frac{31}{12}}$ $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}::\frac{1}{T^{\frac{19}{24}}}:\frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$; amendue le quali determinano la ragione fra i diametri delle canne $D:d::T^{\frac{19}{24}}:t^{\frac{19}{24}}$, e fra le loro basi proporzionali ai quadrati dei diametri $D^2:d^2::T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVI. Non trascuro di notare la proprietà, che se le velocità dell' aria soggiacciano alla stessa legge, le basi delle canne d' organo, e le masse delle corde di un gravicembalo della stessa materia, e tese da pesi in ragione delle loro grossezze accettano la stessa ragione $T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$. E vaglia il vero, nei gravicembali abbia-

biamo trovato $M:m::L^{\frac{19}{12}}:l^{\frac{19}{12}}$, e sostituendo in vece di L, l le quantità proporzionali T, t, $M:m::T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVII. Misurai diligentissimamente coll' ajuto del Signor Liberale Marcuzzi valoroso organista di questa Cattedrale le circonferenze proporzionali ai diametri di due canne, che suonavano il F fa ut, e si corrispondevano in tripla ottava. L' organo della nominata Chiesa è un opera assai perfetta lavorata da Urbano da Venezia l' anno 1420. Stando $T:t::8:1$, se quest' organo va d' accordo col gravicembalo del Trasuntini, si dee trovare $D:d::8^{\frac{19}{24}}:1$. La grandezza $8^{\frac{19}{24}}$ si determina agevolmente o col mezzo dei logaritmi, o col seguente semplicissimo artificio. Constando tre ottave di 36 semituoni, si moltiplichi 36 per 19, ed il prodotto dividasi per 24, onde ne risulti il quoziente $28\frac{1}{2}$, numero di semituoni, dei quali è formata quell'armonia, la cui proporzione si adegua ad $8^{\frac{19}{24}}:1$. Avverto che questi sono semituoni medj, ciascun de' quali si eguaglia alla duodecima parte dell' ottava, ed abbraccia prossimamente la ragione $18:17$. Compongono 28 semituoni una terza maggiore crescente a un di presso $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava. La terza maggiore giusta sopra l' ottava raddoppiata si espone per la proporzione $5:1$, o sia per $120:24$; e venendo $\frac{2}{3}$ di comma dinotati dalla ragione $121:120$, ne segue che $121:24$ indica la terza maggiore aumentata $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava. La metà d' un semituono medio si esprime per $36:35$. Si moltiplichino insieme le due ragioni $121:24$, $36:35$, e ne proverrà la relazione $363:70$, ovvero $5+\frac{13}{70}:1$. Avremo per tanto $8^{\frac{19}{24}}:1::5+\frac{13}{70}:1$, pro-

proporzione, in cui per conformarsi allo stromento del Trafuntini, si dovrebbero corrispondere i diametri delle due canne.

Trovai la circonferenza della canna grave linee del piede Veneto 140, quella della canna acuta linee 29; e quindi stava $D:d :: 140:29 :: 5-\frac{5}{29}:1$. Una tal proporzione è praticamente assai vicina alla $8^{\frac{19}{24}}:1$, bastando calare la circonferenza 29 per due linee, ed il corrispondente diametro per due terzi di linea, acciocchè fra i diametri D, d ci passi l' esatta fisica proporzione $8^{\frac{19}{24}}:1$.

XXXVIII. Egli è per altro vero, che la ragione $140:29$ si accosta con molto maggior precisione alla seguente $8^{\frac{18}{24}}=8^{\frac{3}{4}}:1$. Moltiplicando 36 per $\frac{3}{4}$, ne proviene il numero di 27 semituoni mezzani, che determina la relazione $8^{\frac{3}{4}}:1$. Ci danno 27 semituoni medj una terza minore calante $\frac{2}{3}$ di comma in circa sopra la doppia ottava. L' analogia $24:5$, o sia $576:120$ esprime la terza minore sopra l' ottava duplicata, e detraendo $\frac{2}{3}$ di comma indicati dalla ragione $121:120$, rimane la proporzione $576:121$ propria della terza minore scema $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava. Facciasi $576:121::140:29+\frac{59}{144}$, ed il quarto termine dell' analogia c' istruisce, che accresciuta la circonferenza della canna acuta meno d' una mezza linea, i due diametri D, d si ridurrebbero alla precisa fisica proporzione $8^{\frac{3}{4}}:1$.

XXXIX. Per verificare con maggiore sicurezza la corrispon-

den-

denza fra il nostro stromento, e la legge $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$, presi la misura di un' altra canna media fra le due mentovate, che alla più grave corrispondeva in ottava. Giacchè $T:t::2:1$, dovrà stare nel caso presente $D:d::2^{\frac{3}{4}}:1$. Un' ottava è formata da 12 semituoni medj, numero che moltiplicato per $\frac{3}{4}$ mi somministra il prodotto 9. La sesta maggiore crescente $\frac{2}{3}$ di comma dinotata dalla ragione $121:72$ viene composta da 9 semituoni medj, e perciò dee adempiersi l' analogia $D:d::2^{\frac{3}{4}}:1::121:72$. La circonferenza della canna ultimamente misurata fu linee 84 un pò abbondanti. Si faccia $121:72::140:83+\frac{37}{121}$, e dal quarto termine impareremo la molta esattezza, colla quale anche questa canna si adatta al canone $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$.

XXXX. Al numero XXXIII. ho determinato essere $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}$: ma $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$; dunque $V:u::\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}:\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$.

Nei numeri X. ed XI. si sono per me stabiliti i limiti delle velocità delle vibrazioni gravi ed acute $V:u::\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}:\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $V:u::\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$. Noti chi legge, che il canone accettato dall' organo di Urbano si tiene perfettamente di mezzo, essendo la relazione $\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}:\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ media geometrica fra le due $\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}:\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$. In-

organi differenti si troveranno proporzioni diverse ; ma quando tali stromenti sien lavorati da bravi maestri, le velocità delle oscillazioni abbraccieranno una legge congruamente media fra le due estreme.

XXXXI. Si richiami a memoria aver io provato al numero XXXIV. che le forze *F*, *f* del fiato, che fa suonare le canne, debbono corrisponderfi nella ragione dei diametri *D*, *d* di esse canne. Supposto, che i ventilabri concedano l' ingresso libero all' aere dentro la parte inferiore delle canne, la forza del fiato serberà la proporzione delle quantità d' aria, che passano per quella stretta apertura, cui si dà nome di bocca. Queste fessure si fanno egualmente larghe, e variamente lunghe in proporzione dei diametri delle canne, ed uscendo per esse quantità d' aria in ragione dei diametri stessi, chiaramente si scopre, che le forze del fiato stanno come i diametri mentovati.

SCHE-

SCHEDIASMA VII.

Delle due cagioni determinanti il tuono negli ſtromenti naturali, o artificiali da fiato.

I. IL tuono, o il tempo d' una vibrazione ſonora negli ſtromenti naturali, o artificiali da fiato viene determinato da due cagioni, cioè o da quell' ingegno, col quale ſi genera il ſuono, che riſpettivamente ad alcuni ſtromenti io chiamerò imboccatura, o dalla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro il corpo d' eſſi ſtromenti. Obbediſce il tuono ad una ſola di queſte cagioni, quando all' altra molto prevale: e ſe non ſi dà un tale predominio, naſce ſempre un ſuono diſaggradevole, allora che le due cagioni non vanno perfettamente d' accordo, tentando entrambe di produrre un ſuono diverſo. Parlerò in primo luogo di quegli ſtromenti, in cui il tuono è determinato dal modo, col quale il ſuono ſi forma. Farò poſcia tranſito a quegli altri, ne' quali il tuono dipende dalla lunghezza della corda d' aria nelle loro canne rinchiuſa. Finalmente dirò qualche coſa dei ſuoni falſi traenti l' origine dal contraſto delle due cagioni determinatrici del tuono.

II. Qualora un corpo ſonoro ſi vibra, urta violentemente nell' aria, le particole della quale coſtipandoſi prima, indi reſtituendoſi, e poi dilatandoſi, e tornando nuovamente a reſtituirſi, oſcillano iſocrone allo ſteſſo corpo ſonoro. Nella Diſſertazione I. dello Schediaſma VIII. faccio vedere, che nel tempo di una mezza vibrazione del corpo mentovato le particole aëree l' una dopo l' altra ſi comprimono, che in pari tempo ſi riducono al primiero ſtato, che reciprocando il corpo ſonoro ſpendono il tempo di mezza vibrazione nel dilatarſi, ed altrettanto nel ritornare alla priſtina denſità equilibrata col peſo dell' atmosfera. Con quanto maggiore, o minore velocità in ſiti analoghi il corpo ſonoro ſcorre lo ſpazio, che ſuppongo dato, per cui ſi vibra, e per conſeguenza quanto minore, o maggior tempo s' impiega a ſcorrerlo, altrettanto cala, o creſce il tempo delle compreſſioni, o delle dilatazioni, e delle reſtituzioni dell' aria.

III. Concioſſiachè ſucceda il medeſimo effetto nel noſtro fluido, o venga queſto urtato dal corpo ſonoro, o pure al contra-

trario sia spinto con pari velocità contro il corpo suddetto; ne segue, che urtando l' aria in un corpo, si costipa, ed indi si restituisce, e concependo palpitazione produce suono. Adiviene lo stesso anche quando l' aria in moto colpisce nell' aria quieta, o che cammina avanti più lentamente; imperciocchè in questa circostanza altresì l' aria si condensa, e si mette in oscillazione. In sì fatta maniera, e non altrimenti le particole aeree collocate in una linea, lungo alla quale si propaga il suono d' un corpo, successivamente si vibrano, e ci portano il detto suono all' orecchio. Ad ogni moto violento d' aria sempre qualche suono ci corrisponde. Cotale suono poi si sente grave, e debole, ovvero acuto, e forte conforme a che l'aere cammina con minore o con maggiore velocità. Tutto giorno sperimentiamo, che il suono cresce e di tuono e di forza all' incalzare del vento, e poscia torna a calare, quando il vento diviene meno impetuoso.

IV. Che se l' aria spinta violentemente sia costretta a passare per un' angusta fessura, non solo urta nelle pareti della fessura stessa, ma affollandosi per trovare l' uscita, vie più si costipa, e concepisce un suono spiritoso e robusto. Dipende il tuono dalla celerità, colla quale l'aria passa per la fessura, da cui con una qualche ragione inversa prendono norma i tempi delle condensazioni dell' aria stessa. La detta velocità può alterarsi per due motivi; o perchè il movimento dell' aria cali, o cresca prima di entrare nella fessura, che si suppone invariata; o perchè conservandosi costante il nominato movimento dell' aria, lo spiraglio si ristringa, o si allarghi; essendo verità nota che in tal circostanza l' aria camminerà dentro le picciole aperture con velocità in proporzione inversa dell' aja delle aperture suddette. Ma posto che il moto dell' aria prima d' introdursi nella fessura, e l' aja della stessa si corrispondessero in data ragione; l' aria viaggerebbe per la fessura in ognuno degli accennati casi colla medesima velocità, ed i suoni non riuscirebbero diversi, salvo nel piano e nel forte, secondochè per l' apertura più o meno ristretta facesse transito una quantità d' aria minore o maggiore.

V. Rischiaro le cose dette coll' esempio del fischio. Per fischiare s' increspano, e si ristringono le labbra, di maniera che alla metà di esse resta un angusto pertugio, per cui spinto velocemente il fiato, si genera il fischio. Dipende il suo tuono dalla velocità, colla quale l' aria passa per l' apertura, e nella de-

determinazione di tale velocità c' entrano due elementi, cioè a dire il vario empito, con cui il fiato è cacciato dai polmoni, e delle labbra il vario ristringimento. Se quanto cresce, o cala l' aja della fessura, altrettanto crescerà altresì, o calerà il moto, col quale il fiato esce dal petto, l'aria farà transito per il pertugio con celerità invariata, e rimanendo costante il tuono del fischio, se ne altererà soltanto la forza, e si udirà esso o piano o forte, secondochè per l' adito più o meno angusto passa una quantità d' aria minore o maggiore. Chi si diletta di fischiare, ed è fornito di buon gusto, e di orecchia perfetta, sa far uso a dovere dei due descritti elementi, producendo le voci di vario tuono, e modificandone ad arbitrio il vigore.

VI. Alla classe, di cui parliamo, appertengono i suoni, che si sentono, quando il vento s' introduce per una carta socchiusa, e mezzo aperta, che in luogo di vetri ripari gli sportellini d' una fenestra, il quale stromento (se pure merita un tal nome) M. Dodart (a) chiama per brevità impannata susurrante. Crescendo la velocità del vento, crescono i suoni e di tuono, e di forza; perchè qui non ha luogo l' artificio di ristringere l' apertura nei suoni acuti, onde non riescano più vigorosi dei gravi, e quindi s' odono snervati, i suoni gravi, e crudi gli acuti. Anche le pivette dei fagotti, degli oboè, e certi registri dell' organo con piva meritano d' essere collocati sotto la stessa spezie. Le corde d' aria contenute nelle loro canne sono talmente corte, che non ponno fare contrasto colla violenza della imboccatura, dalla quale principalmente viene il tuono determinato. Nel registro dei tromboncini di un organo, opera assai pregevole del Signor D. Pietro Nachini, la canna più grave lunga in circa un piede ed un sesto corrisponde all' unisono colla canna lunga otto piedi del registro, che chiamasi principale. In oltre le lunghezze di due tromboncini accordati in ottava non si riferiscono nella ragione 2 : 1 necessaria, acciocchè le canne corrispondenti del registro principale formino la detta consonanza, ma bensì a un di presso nella ragione 3 : 2. Quindi ella è cosa chiara, che il tuono dei tromboncini non è come nella canna del registro principale dalle lunghezze delle corde d' aria determinato. Dalla imboccatura per tanto il tuono dei tromboncini prima-

---

(a) *Memorie dell' Accademia di Parigi dell' anno 1700.*

mariamente dipende: ed in fatti esso cresce o cala, secondochè abbassando o alzando la molla di ottone, che comprime la linguella, si accorcia o si allunga quella porzione della linguella che oscilla, e conseguentemente si ristrigne o si allarga la fessura, per cui l' aria entra dentro la canna. Nel mentovato registro la canna fa la stessa figura come nel gravicembalo, e nel violino il corpo dello stromento, ed è principalmente destinata a rendere più sonora la voce. E siccome il corpo della violetta è maggiore di quello del violino, ed il corpo del violoncello eccede quello della violetta, così ai suoni più gravi del nostro registro si adattano canne più lunghe, e più larghe, onde alla gravità della voce corrisponda il corpo dello stromento. Nel violino esempigrazia egli è necessario, che lo stesso corpo serva a più suoni; ma nel registro, di cui parliamo, si può con maggior perfezione assegnare a ciascun suono la canna, che più gli conviene.

VII. Se ciò, che ha stabilito il celebre M. Dodart intorno le cagioni della voce dell' uomo, e de' suoi differenti tuoni nelle Memorie della Reale Accademia di Parigi degli anni 1700, 1706, 1707, si accordasse interamente colla verità, il tuono della voce umana, ed ancora di altri animali derivarebbe unicamente (supposta costante la velocità dell' aria nel canale della trachea) dalle varie aperture di quella fessura, cui si dà il nome di glottide. Ammette questo dotto Autore la varia tensione, ed i fremiti delle labbra della glottide, ma soltanto come necessarj alla formazione della voce, e non già come determinanti il tuono della medesima. Io per altro ho dimostrato al numero III. che ancora indipendentemente dalla palpitazione di un corpo solido, l' aria può render suono; ed in confermazione di ciò basta riflettere allo strepitoso fragore dei tuoni. Oltre di che qual mai sensibile tremito possono concepire le fibre del legno, che circondano la fessura, per cui l' aria ha l' ingresso dentro la canna di un flauto?

Frattanto il rinomato M. Ferrein (*b*) ha scoperto, che le due labbra della glottide, da lui chiamate corde vocali, son quelle, che incitate all' oscillazione dal fregamento dell' aria, la quale passa violentemente fra loro, e tese più, o meno secondo

(b) *Memorie dell' Accademia di Parigi* 1741.

do il bisogno, producono i diversi suoni della voce. Non potendo l' ingegnoso Autore tentare le sue sperienze sopra uomini vivi, s' immaginò di restituire la voce ai morti. Adattato un piccolo mantice ad alcune trachee fresche fresche, l' aria, che con gran forza fece passare per la glottide, secondochè le cordicelle di questa furono più o meno stirate, portò differenti tuoni all' orecchio, i quali dalle diverse aperture della glottide non ricevevano alterazione. Le varie voci, che si ottengono col mezzo di questa esperienza, cangiano poco di natura, ed ancora si riconosce il mugito di un toro, il grido d' un cane che si lamenta, quantunque manchino il palato, i denti, le labbra, e la laringe medesima staccata dalla gorga dell' animale fosse ordinariamente assai mutilata, e qualche fiata altresì si fosse staccata l' epiglottide, e tutti i pezzi di cartilagine, che cingono o coprono la glottide, e le corde vocali, a cagione di rendere visibili le loro vibrazioni. E conciossiachè potesse sembrare impossibile, che due corde, la cui lunghezza non eccede un' oncia, rendessero un suono maschio e vigoroso nei tuoni gravi, non ha mancato M. Ferrein (c) di allegare la ragione dimostrativa di questo effetto maraviglioso.

VIII. Abbenchè gli esperimenti del commendato Scrittore non ci lascino dubitare, che dalla varia tensione delle labbra della glottide nascano principalmente i cangiamenti di tuono; nulladimeno essendo parimente certo, che quanto più si stendono le corde vocali, tanto maggiormente l' una all' altra si accostano, e che questo solo elemento della diversa apertura, quando i polmoni spingano l' aria con forza uniforme, produce la diversità dei tuoni nel zufolo; io conghietturo, che in una voce perfetta amendue le cagioni si uniscano nella determinazione del medesimo tuono.

Posto ciò rimane il pregio loro alle belle riflessioni di M. Dodart intorno alle minutissime alterazioni dell' apertura della glottide uguale al più ad una linea, mentre si fa transito per picciolissimi gradi dal tuono più grave al più acuto, e mentre non cangiando tuono, si passa con menomissimi incrementi, o decrementi dal piano al forte, o al contrario. Non cessa egli, e con ragione, d' ammirare l' infinita Sapienza del Creatore, il qua-

(c) *Memorie dell' Accademia di Parigi 1743.*

il quale ha dato all' uomo la facoltà di far uso di un organo con tanta perfezione, e prontezza, senza conoscerne la struttura, e gli stupendi artificj.

IX. Alla qualità della voce umana molto giova la perfezione di ciascuna corda vocale, la loro squisita uniformità nella tessitura, nella densità, nella tensione, nella rigidità, e nelle lunghezze, ed altresì l' esatto accordo fra le due cause determinatrici del tuono. Qualunque considerabile difetto, o alterazione di questa puntuale corrispondenza può far divenire falsa la voce. Se non che rivolgendo la considerazione al registro dell' organo, che si nomina voce umana, perchè di molto l' imita, ogni suono del quale fornito di un' aggradevole pulsazione è formato da due suoni, che discordano a un di presso per un diesis' enarmonico, si potrebbe sospettare, che nella voce dell' uomo l' effetto analogo dà una cagione simile procedesse.

La doppia concavità della bocca, e delle narici chiamata dal Fabriccio canal esteriore, per distinguerla dal canale interiore, cioè dalla trachea, fa l' ufficio di corpo dello stromento in riguardo alla voce; e per quanto, attesa la disuguaglianza, e la mollezza delle parti, onde questo canale è composto, possa sembrare poco capace di risonanza, non può mettersene in dubbio l' ottimo effetto almeno mediante il palato, e le narici. Rende ciò manifesto l' alterazione del suono della voce nei raffreddati di testa, e quando succede per qualsisia cagione, che l' aria non valichi liberalmente pel naso. Giudica M. Dodart falsa la frase popolare parlare, o cantare nel naso, e tutto al contrario stabilisce, che se cantasi colla sola bocca, il naso essendo chiuso, e per conseguenza senza ch' esso abbia alcuna parte nel suono della voce, allora la voce, che ne risulta, rassomiglia quella dell' anitra, il che propriamente intendesi di esprimere, quando si dice parlare, o cantare nel naso. Ricorrendo agli esperimenti, ho trovato, che cantando e col naso, e colla bocca, ed anche o col solo naso, o colla sola bocca, la voce riuscirà grata, purchè l' aria non passi pel canale delle narici o poco, o molto impedito. Che se non si osserverà questa precauzione, si canterà nel naso con disgusto di chi sta ad ascoltare.

La dimensione del corpo dello stromento rispettivamente alla voce non è costante. La glottide ascende, allora che si producono le voci acute, ed al contrario discende, quando si fanno

fanno fentire le voci gravi, e fe quefte faranno delle più profonde, fi fporge la bocca in fuori quanto fi può; e quindi corrifponde alle voci acute un canale alquanto più corto, ed alquanto più lungo alle voci gravi. Si capirà la maffima perfezione della voce umana, riflettendo ch' effa fola equivale ad un regiftro di tromboncini nell' organo di moltiffime canne formato, che andaffero per minimi gradi crefcendo di tuono. Ma concioffiachè con un tale regiftro non fi potrebbe efeguire il piano, ed il forte; chiaramente fi fcopre quanto effo alla voce umana cederebbe di perfezione.

X. M' innoltro a parlare degli ftromenti da fiato, nei quali il tuono è determinato dalla lunghezza della corda d' aria contenuta nelle loro canne. Sotto quefto genere vanno collocate le canne d' organo, il flauto, il flauto traverfo, l' oboè, il fagotto, la tromba, il corno da caccia, &c. che non poffono rendere altri fuoni, falvo quelli, che fono proprj delle corde d' aria più o meno lunghe, che fi mettono in tremito. Ho detto più o meno lunghe per due motivi; perchè fono atte ad ofcillare la corda d' aria contenuta nel corpo dello ftromento, o le fue metà, o le fue terze parti, &c. o perchè la canna dello ftromento fia in più luoghi artificiofamente forata, conforme fi pratica nel flauto, nel flauto traverfo, nell' oboè, nel fagotto. Serrati tutti i fori, la corda d' aria termina a un di preffo all' eftremità della canna; ed aprendoli gradatamente, la corda fteffa fi va proporzionatamente fcorciando.

XI. Ma quantunque nei mentovati ftromenti l' imboccatura ferva alla corda d' aria, egli è d' uopo adattarla a quei fuoni, che fi vogliono generare. Mi fovviene, che avendo otturata colla palma della mano una canna d' organo, è ftato neceffario darle un tenuiffimo fiato, acciocchè produceffe il fuono all' ottava grave di quello della canna aperta: accrefcendo un poco la forza del fiato, il fuono faliva all' ottava acuta. S' io voglio, che fuoni la corda intera dalla canna circondata, bifogna che regoli talmente la velocità del fiato, ch' entrando nella bocca della canna, e comunicando colla corda d' aria, poffa concepire un tremito unifono alla corda fuddetta. Incitando maggiormente il fiato, onde divenga unifono alla metà della corda, fuonano le due metà, e così di mano in mano fi pongono in ofcillazione le terze, le quattro parti, &c. per opera di

fiati unisoni ad esse parti. Chi applicasse al fagotto la pivetta dell' oboè, in vece di far oscillare la corda intera, ne metterebbe in tremito le metà, o le terze parti; dimodochè si udirebbero suoni, che ai consueti del fagotto corrisponderebbero in ottava, o in duodecima. Rottasi lateralmente una pivetta d' oboè, un principiante tagliò via la parte rotta, e rese la pivetta più ristretta notabilmente: ed avendola poi adattata allo stromento, i suoni tutti montavano all' ottava alta. Richiami a memoria il Lettore, essersi da me dimostrato nello Schediasma IV. al numero XXII. che non si comunicano sensibilmente altri tremiti che gli unisoni o esattamente, o prossimamente; e perciò se la palpitazione, che concepisce il fiato mediante l' imboccatura, non si riferisce punto all' unisono colla corda aerea contenuta nel corpo dello stromento, o colle parti aliquote della sua lunghezza, non nasce in essa corda sicuramente alcun suono.

XII. Sino ad un certo segno la maggiore, o minore velocità del fiato cagiona nel suono il forte, o il piano. Non può per altro negarsi, che in quegli stromenti, la struttura dei quali non permette, che acconciamente si allarghi, o si restringa l' angusta apertura, per cui l' aria passa, il forte ed il piano non vadano accompagnati da qualche picciolo accrescimento, o decremento di tuono; segnandosi per conseguenza una corda d' aria alquanto più corta, o alquanto più lunga. Non succede così nell' oboè, e nel fagotto, nei quali comprimendo la piva con forza minore, o maggiore, ed accrescendo, o scemando a dovere la velocità del fiato, si fa sentire il forte od il piano senz' alterazione del tuono.

Nella tromba, e nel corno da caccia i limiti del forte, e del piano sono molto ristretti, di maniera che passati questi limiti, il fiato cangia di tuono, ed essendo divenuto unisono ad una parte aliquanta della corda d' aria nello stromento rinchiusa, non può ad essa il tremito sonoro partecipare. Al contrario nelle canne d' organo, nei flauti, negli oboè, &c. i detti confini sono talmente vasti, che ridotto per esempio il suono 1 della corda intera alla massima forza, di cui è capace, basta ch' io aumenti per un minimo la velocità del fiato, acciocchè questo divenga unisono alle due metà della corda, e produca il suono 2.

XIII.

XIII. Per confermare vie più la verità, che negli ſtromenti da fiato l' imboccatura, e la corda d'aria determinano il tuono, il quale obbediſce per dir così a quello dei due elementi, ch' ha maggior forza, feci il ſeguente raziocinio. La pivetta d' oboè ſeparata dallo ſtromento racchiude nella picciola canna una corda d' aria così corta, che l' elemento predominante nella determinazione del tuono dee riputarſi l' imboccatura. Col variar dunque queſta, un perito ſonatore potrà cavar parecchi tuoni dalla pivetta, i quali facciano oſcillare corde d'aria o più lunghe, o più corte della canna, la cui lunghezza alla violenza della imboccatura non ha vigor di reſiſtere. Applicata la pivetta al corpo dell' oboè, e laſciato aperto ogni foro, la corda d' aria è di lunghezza conſiderabile, e conſeguentemente la diverſità dell' imboccatura potrà ottenere minore effetto. Finalmente otturati i fori tutti dello ſtromento, la corda d' aria diviene talmente lunga, che dalla varia imboccatura verrà cagionata molto picciola mutazione di tuono.

Pregai col mezzo del P. Franceſcantonio Vallotti inſigne Maeſtro di cappella nella Baſilica di S. Antonio di Padova il Signor Matteo Lucca famoſo ſonatore di oboè a tentare gli eſperimenti mentovati, i quali a maraviglia corriſpoſero ai miei penſamenti. Colla pivetta ſeparata dall' oboè fece un intero eſacordo di voci giuſte, diſtinte, ed articolate; affermando che ſarebbe arrivato anche all' ottava, ſe aveſſe avuto in pronto una pivetta buona, e perfetta; giacchè il vero indizio della perfezione d' una pivetta ſi è il render eſſa le voci tutte d' un intera ottava. Notò il P. Vallotti, che per cavare il tuono più grave dalla pivetta, l' apriva colle dita prima di applicarſela alle labbra, colle quali poi comprimendola acconciamente, e rinforzando anche il fiato giuſta il biſogno, produceva i tuoni a grado a grado più acuti. Adattata poſcia la pivetta allo ſtromento, laſciando i fori tutti aperti, non ha potuto variar la voce, ſalvo che per un tetracordo, ma con intonazione meno perfetta che nel primo eſperimento. Chiuſi all' ultimo tutti i fori, non gli è riuſcito di far mutazione ſe non di un tuono a un di preſſo, ma con intonazione affatto falſa, ed aſſai diſguſtoſa.

XIV. Naſce il ſuono falſo dal meſcolamento di più ſuoni, che in ragioni ineleganti fra loro ſi riferiſcono. Nella terza eſperienza l' aere ſpinto dentro la pivetta concepiſce ſforzatamen-

 te un

te un ſuono più grave, o più acuto di quello della corda d' aria contenuta nello ſtromento, il quale ſuono non pertanto agiſce nella detta corda a cagione dell' uniſono proſſimo, di maniera che ſi ſentono nel tempo ſteſſo il ſuono generato dalla pivetta, ed il ſuono della corda aerea rinchiuſa nella canna dell' oboè. Quindi manifeſtamente ſi comprova quello, che ho detto di ſopra al numero XI. doverſi l' imboccatura talmente regolare, che il fiato poſſa acquiſtare palpitazioni uniſone alle corde d' aria, di cui ſi vuol far ſentire il ſuono. In fatti procedendo i ſonatori d' oboè per eſempio dal grave all' acuto, premono ſempre più la pivetta colle labbra, onde la ſua apertura ſi vada gradatamente ſtringendo, e ſe in alcuni caſi il riſtringimento non è ſufficiente, ſuppliſcono coll' accreſcimento della velocità del fiato, il che ne' ſuoni più acuti ſuol renderſi neceſſario.

SCHE-

SCHEDIASMA VIII.

Della propagazione de' tremiti sonori nell' aria.

DISSERTAZIONE I.

Della propagazione del suono per linee, o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, supponendo, che tutti i punti aerei contenuti nel medesimo raggio si vibrino per eguali spazj.

I. PEr procedere rettamente nella trattazione dell' argomento difficilissimo, che mi propongo, stimo necessario l' appoggiarmi ad alcuni fenomeni manifestati dalla esperienza.

E primieramente oscillando un corpo sonoro, io sento in diverse distanze lo stesso suono in riguardo al grave e all' acuto, e l' udirei ancora egualmente forte, prescindendo dalle resistenze, se in cambio di dilatarsi sfericamente intorno il centro sonoro, fosse obbligato a propagarsi lungo un canale cilindrico per tante linee rette parallele ai lati del detto canale. Per ora suppongo, e mi riservo di provarlo nelle Differtazioni seconda, e terza, che il suono diffondasi non per settori sferici, ma per innumerabili linee, o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro; e che tutti i punti aerei si vibrino per eguali spazj con pari velocità in siti analoghi.

In secondo luogo essendo l' aria valevole di portarci all' orecchio più suoni, che differiscono nel piano, e nel forte, ne segue necessariamente, che le sue particole debbono vibrarsi a guisa di pendoli a cicloide, e che per conseguenza gli spazj scorsi dalla stessa particola, cominciando dalla quiete, stanno come i seni versi degli angoli esprimenti i tempi, nei quali i detti spazj si scorrono.

Finalmente il suono viaggia equabilmente, cioè a dire le distanze, alle quali si propaga, sono proporzionali ai tempi, che nella mentovata propagazione s' impiegano. Da un tal fenomeno si ricava, che segnati in una linea retta aerea varj punti l' uno dall' altro egualmente distanti, se fra il principio del moto del primo e del secondo ci passa il tempo uno, fra il principio del moto del primo e del terzo ci passerà il tempo due, e così

di

di mano in mano. Quindi i varj punti d' aria fanno vibrazioni isocrone, che principiano tanto più tardi, quanto essi punti sono più rimoti dal centro sonoro.

II. Dai tre premessi fenomeni deriva il quarto, che metto sotto la considerazione di chi legge, col mezzo del seguente teorema.

Al cessare delle oscillazioni del corpo sonoro, cessano altresì le agitazioni nell' aere.

Sia A a (*Fig.* 29.) una minima particola, o fibra d' aria, ed i suoi punti estremi A, a si vibrino per le saette uguali A G, a g. Sopra i diametri A G, a g si descrivano i circoli dimostrati dalla figura, e tirate prima per li centri D, d le linee 3 D 9, 4 d 10 normali ad A g, onde ogni circolo resti diviso in quattro quadranti, ciascun quadrante s' intenda distribuito in pari numero infinito di parti eguali. Nella figura per evitare la confusione ho diviso ogni quadrante in tre sole porzioni. Per li punti delle divisioni si conducano come nella figura le ordinate ai diametri A G, a g.

Vibrandosi il punto A non altrimenti che un pendolo a cicloide, gli archi A 1, A 2, A 3, &c. rappresenteranno i tempi, nei quali si scorrono gli spazj corrispondenti A B, A C, A D, &c. i quali staranno come i seni versi degli angoli A D 1, A D 2, A D 3, &c. che ai detti archi A 1, A 2, A 3, &c. sono proporzionali. Le stesse riflessioni si adattino alle oscillazioni del punto a.

La nostra fibra A a sia di tale lunghezza, che fra il principio del moto dei punti estremi A, a ci passi il tempo proporzionale all' arco A 1. Ciò posto, scorso dal punto A lo spazio A B, in tale istante si comincierà a movere il punto a, e la particola A a si sarà costipata per lo spazio A B. Nel secondo tempicello 1, 2 il punto A viaggerà per lo spazio B C, ed il punto a per lo spazio $ab = AB$, ed essendo $BC > ab$, crescerà la costipazione della fibra, che si troverà eguale a B C. Con tal metodo procedendo, osserveremo che si aumenta il ristringimento della fibra A a, fino a tanto che il punto A giunge al punto D dividente per metà lo spazio totale A G. In sì fatta circostanza la costipazione giunta al colmo s' eguaglia a

C D,

CD, e la particola Aa è fornita della massima velocità. E vaglia il vero, mentre il punto A passa lo spazio DE, dal punto a si scorre lo spazio eguale cd, i quali spazj sono i massimi, che si passino in uno de' nostri tempicelli rappresentati dalle parti aliquote simili, in cui si sono distribuiti i due circoli, e conseguentemente si passano colla massima velocità. Osservi chi legge, che per uno de' mentovati tempicelli la costipazione nè cresce, nè cala, viaggiando, come abbiamo notato, i punti A, a per eguali spazj DE, cd.

Nel tempo minimo, che segue immediatamente, il punto A si avanza per lo spazio EF, ch' è più picciolo dello spazio de corso dal punto a, e quindi la fibra comincia a dilatarsi. Nei tempicelli che succedono essendo i passi del punto A minori di quelli del punto a, va continuamente scemando la costipazione, la quale finalmente si riduce a nulla, quando la fibra compiuta una vibrazione si ritrova in quiete nel sito Gg. Quivi essendosi la particola restituita alla pristina dimensione, stando equilibrata col peso dell' atmosfera, e trovandosi in riposo, non farà certamente più moto, se a ciò non le dà nuovamente motivo la reciprocazione del corpo sonoro.

III. In fatti reciprocando il corpo sonoro, si rompe l' equilibrio dalla parte di A, e mentre il punto a continua il suo cammino per lo spazietto fg, e compie una vibrazione, il punto A retrocede per un pari spazio GF, e la nostra fibra si dilata per tale quantità oltre la sua naturale misura. Nel tempicello seguente ritornano indietro il punto A per lo spazio maggiore FE, ed il punto a per lo spazio minore gf, e la dilatazione si aumenta. Acquista essa il massimo valore, quando pervenuti i punti A, a nei siti D, d, la particola d' aria è fornita della massima velocità.

Calando poscia la velocità, cala altresì la rarefazione con tal legge, che divengono l' una e l' altra eguali a nulla, mentre la fibra si restituisce alla primitiva positura Aa. Rifletto di bel nuovo, che accoppiandosi nella particola d' aria la quiete con quella lunghezza, che richiede l' equilibrio col peso dell' atmosfera, egli è impossibile, che senza la cagione estrinseca d' una iterata vibrazione del corpo sonoro seguiti ad oscillare.

Quello che si è detto d' una particola, s' applichi a tutte, e conchiudasi che al cessare delle vibrazioni del corpo sonoro, cessano parimente le agitazioni dell' aria.

IV.

IV. I premessi raziocinj ci hanno fatto scoprire varie curiose proprietà, che le particole d' aria sono oltre il consueto compresse nelle oscillazioni, dilatate nelle reciprocazioni; che le massime compressioni, e dilatazioni vanno congiunte colle massime velocità acquistate dalle particole oscillando, e reciprocando; che nell' atto di ridursi alla quiete ricuperano le particole la loro ordinaria compressione. Se chi legge esaminerà gli Autori più celebri, si accorgerà, che in tale proposito hanno traveduto. Intanto stimo bene notare la differenza, che passa fra una fibra d' aria, ed una corda solida, che oscilla trasversalmente a due scannelli appoggiata. Continuerebbe questa a vibrarsi per un tempo infinito, se non ci fossero resistenze; perchè quando è in quiete, si trova fuori di equilibrio, e quando si trova in equilibrio, cioè a dire in linea retta, non è in quiete. All' opposto la fibra aerea, rimossa la cagione esterna, cessa di vibrarsi; perchè in essa si unisconoo e l' equilibrio, e la quiete.

V. Dilucidato un tal punto, ch' era dianzi da molta oscurità circondato, proseguisco l' intrapreso cammino, e mi faccio a sciogliere il seguente problema.

Il primo punto A (*Fig.* 30) *della linea aerea* A B *facendo una mezza oscillazione per la direzione* A B, *scorra uno spazio eguale alla linea* A D *normale ad* A B, *ed intanto il tremito sonoro si sia propagato da* A *fino in* B. *Nell' istante, in cui il punto* A *giunge al termine del detto spazio, un altro qualunque punto* G *abbia passato lo spazio eguale alla linea* G H *parallela ad* A D. *Congiunti i punti* D, H, *ed altri similmente determinati con una curva, che passerà pel punto* B, *perchè quando* A *ha compiuta una semivibrazione, il punto* B *non s' è ancor cominciato a movere; si dimanda la natura della curva medesima.*

Segnata B C uguale, e parallela ad A D, e condotta per li punti D, C la linea D C F, si faccia centro in C, e col raggio C B descrivasi il quadrante B K F. Si meni poscia pel punto H la retta H I K parallela ad A B.

Viaggiando il suono equabilmente, se nel tempo A B si propaga da A fino in B, nel tempo G B si propagherà da G fino in B, e la linea A G esprimerà il tempo, per cui il punto G si comincia a movere dopo del punto A: ma i punti A, G giungono al termine degli spazj eguali alle linee A D, G H nel

nel medesimo istante, ed il punto A a scorrere lo spazio eguale ad AD c' impiega il tempo AB; dunque il punto G nel passare lo spazio GH ci spenderà il tempo GB, cioè a dire quel tempo stesso, nel quale il suono cammina da G fino in B. Ho notato al numero primo che i tempi, in cui si scorrono gli spazj eguali alle linee AD, GH, stanno come gli archi BF, BK, dei quali le dette linee sono i seni versi. Quindi ci si presenta l' analogia AB:GB::BF:BK, da cui nasce l' altra AB:AG::BF:KF, che somministra l' equazione $AG = \frac{AB.KF}{BF}$. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC = CF = c$, il quadrante $BKF = b$, l' arco $KF = z$, $AG = DE = x$, $HE = y$, e conseguentemente $GH = c - y$. Egli è noto che l' arco $KF = z$ si esprime per $S \frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Sostituiti nella premessa formola in cambio delle linee i valori analitici, troveremo $x = \frac{L}{2b}.S \frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{Lz}{2b}$; equazione appartenente alla curva cercata DHB. La stessa curva si è quella, in cui si ripiega la metà $DC = \frac{1}{2}L$ della corda L solida, e tesa, mentre si vibra appoggiata a due scannelli, uno de' quali è D, ed il punto medio C scorre la saetta $CB = c$. Questa verità è stata da me dimostrata nello Schediasma IV. e ciò prima aveano fatto i Signori Brook Taylor nel suo Metodo degl' Incrementi diretto, ed inverso, e Giovanni Bernoulli nel Tomo III. dei Comentarj dell' Accademia di Pietroburgo. Non dissimulo parimente, che della scoperta, che la curva ultimamente nominata sia la stessa con quella del presente problema, siamo debitori al Signor Giovanni Bernoulli il giovane. Veggasi la sua eccellente Dissertazione sopra la propagazione del lume, che l' anno 1736. ha ottenuto il premio dall' Accademia di Parigi.

VI. La curva DHB, a cui si adatta la semicorda solida DC, si riferisce all' asse DC, e BC, HE, sono gli spazj, che in pari tempo si scorrono, mentre essa corda passa dalla positura DHB alla linea retta DEC. Che se la curva DHB si con-

si considera come servente al nostro problema, va riferita all' asse A B, e gli spazj per la direzione A B, al fine dei quali i punti aerei A, G giungono nello stesso istante, s' eguagliano alle linee A D, G H. Si avverta che i punti A, G pervengono nel medesimo momento al termine dei competenti spazj; perchè uniti in una somma il tempo B K, che dal punto G s' impiega a passare lo spazio eguale a G H, ed il tempo K F, per cui il punto G comincia a moversi dopo del punto A, ne risulta il quadrante B K F dinotante il tempo speso dal punto A nello vibrarsi per uno spazio eguale ad A D.

Determinare la forza acceleratrice d' un qualunque punto G, dopo che ha camminato lo spazio eguale a $GH = c - y$, e mentre gli resta da scorrere lo spazio $HE = y$.

VII. Presa nuovamente per mano l' equazione della curva D H B $x = \frac{L}{2b} . S \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, faccio $GH = q$, onde sia $HE = y = c - q$, e conseguentemente $dy = - dq$, e $c^2 - y^2 = 2cq - q^2$. Adempiute le sostituzioni, trovo $x = \frac{L}{2b} . S \frac{-c\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}}$, e differenziando, $dx = \frac{Lc}{2b} . \frac{-dq}{\sqrt{2cq - q^2}}$ (1). Passo alle seconde differenze presa dx come costante, ed adempiute le convenienti operazioni, scopro $ddq = \frac{\overline{c - q} . dq^2}{2cq - q^2}$ (2). Segno le due flussioni G L, L M ciascuna eguale alla costante dx, e condotte le ordinate L O, M Q, per li punti H, O tiro le linee H N, O P parallele ad A B, e con ciò determino $NO = dq$, $PQ = dq + ddq$.

Rappresentino M L, L G le pari lunghezze di due particole d' aria tali e quali le richiede l' equilibrio col peso dell' atmosfera: e giacchè i punti M, L, G si sono mossi per gli spazj eguali alle linee M Q, L O, G H, egli è chiaro che la particola M L si è ridotta alla lunghezza $ML - PQ = dx - dq - ddq$, che la particola L G si è ridotta alla lunghezza $LG - NO = dx - dq$.

Ora

Ora avendo dimostrato nello Schediasma II. che le densità dell' aria sono proporzionali alle forze comprimenti, e per conseguenza alle corrispondenti elasticità, che alle suddette forze comprimenti si eguagliano, e stando le densità delle fibre dx, $dx - dq - ddq$, $dx - dq$ reciprocamente come le loro dimensioni; nella stessa ragione inversa si riferiranno altresì le forze elastiche di esse fibre. Si chiami P il peso dell' atmosfera, a cui si eguaglia la forza elastica della fibra dx, e facendo

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dq-ddq} :: P : \frac{Pdx}{dx-dq-ddq},$$

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dq} :: P : \frac{Pdx}{dx-dq},$$

impareremo che la forza elastica della particola ML s' eguaglia a $\frac{Pdx}{dx-dq-ddq}$, che la forza elastica della particola LG s' eguaglia a $\frac{Pdx}{dx-dq}$. Ella è la differenza di queste elasticità, che sollecita la particola LG da L verso B, e quindi scopriremo il valore della forza sollecitante la fibra LG uguale a $\frac{Pdx}{dx-dq-ddq} - \frac{Pdx}{dx-dq} = \frac{Pddq}{dx}$. In vece di ddq pongo la pari grandezza somministratami dalla equazione (2), onde s' abbia la detta forza sollecitante $= \frac{P.\overline{c-q}.dq^2}{dx.\overline{2cq-q^2}}$: ma l'equazione (1) m' insegna essere $\frac{dq^2}{2cq-q^2} = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}$, ed in oltre $c-q=y=$ HE; dunque effettuate tali sostituzioni troveremo la nostra forza $= \frac{4b^2Pydx}{c^2L^2}$. Sia m la massa della linea, o corda d' aria 2AB, la cui lunghezza L. Di questa massa alla particola LG, che prima di ricevere la nuova costipazione s' eguagliava in lunghezza a dx, ne tocca la porzione $\frac{mdx}{L}$. Di-

vidêndo per tanto la forza sollecitadte la fibra LG per la massa della stessa fibra, ne risulta la forza accelerante tutta la particola LG, e per conseguenza anche il punto $G = \frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$, quando ad esso punto resta da scorrere lo spazio $HE = y$.

VIII. Atteso che tutti i punti aerei per cagion d' una oscillazione del corpo sonoro fanno successivamente vibrazioni sincrone, ed uguali; ne segue, che un qualunque punto A, mentre gli rimane da passare lo spazio $= HE = y$, sarà fornito della forza acceleratrice $\frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$.

L' aver trovato le forze acceleratrici proporzionali agli spazj da percorrersi, mostra possibile nell' aria il moto, che appoggiandoci ai fenomeni, abbiamo supposto simile a quello d' un pendolo a cicloide. Ho detto possibile, perchè l' aria è capace di ricevere in se stessa delle vibrazioni, che non sono dotate della mentovata regolarità. Una corda solida DHB si allontani soverchiamente dalla linea retta DEC, dimodochè s' alteri sensibilmente la sua consueta tensione. Nelle prime oscillazioni di questa corda, e conseguentemente anche in quelle, che si comunicano all' aere, non si verifica la proprietà, che le forze acceleranti serbino la ragione degli spazj da passarsi.

Determinare la velocità, colla quale si propaga il suono.

IX. Suppongasi la semicorda solida DC, che per quello riguarda la lunghezza $\frac{1}{2}L$, la massa $\frac{1}{2}m$, l' elasticità P si conformi interamente alla semicorda aerea AB. Suppongasi inoltre che la corda DC si sia ripiegata nella curva DHB, di maniera che la saetta BC s' eguagli a quello spazio $= AD = c$, che facendo una mezza oscillazione scorre prima il punto A, ed indi gli altri componenti la corda d' aria AB. Nello Schediasma IV. dove ho trattato della figura, a cui s' adatta una corda tesa, che si vibra, mi è riuscito di provare che la forza acceleratrica di qualunque punto di tali corde, e per esempio della

la corda DHB, al qual punto resta da scorrere lo spazio y per ritornare alla linea retta DC, s' eguaglia a $\frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$, ch' è quella forza appunto, la quale accelera i punti aerei nella corda AB, quando loro rimane da passare lo spazio y. Paragonati insieme i due punti, B della corda solida, A della corda fluida, e fatta la riflessione che vibrandosi per eguali spazj, vengono in siti analoghi animati da pari forze acceleratrici, conchiuderemo, che nelle loro oscillazioni e' impiegano pari tempo: ma il punto B, e tutta la semicorda DHB sono isocroni, e di più in tempo che il punto A si vibra per lo spazio $=$ AD $= c$, il suono si propaga da A fino in B; dunque nel tempo che la corda 2DC fa una mezza oscillazione, il suono scorre la metà della sua lunghezza, e per conseguenza nell' istante che la corda stessa ha compiuta una intera vibrazione, il suono ha viaggiato per lo spazio eguale alla lunghezza della medesima corda.

Ho fatto vedere nel citato Schediasma al numero XV che chiamata b la lunghezza d' un pendolo a secondi, e t il tempo d' una vibrazione della corda intera 2DC espresso parimente in secondi, si verifica la formola $t = \frac{c}{2b} \sqrt{\frac{Lm}{Pb}}$, la quale giusto a quanto si è per me dimostrato, serve altresì a determinare la velocità del suono, o sia la distanza L, a cui si propaga nel tempo t. Nomino a l' altezza, alla quale si sostenta nel barometro il mercurio, G la sua gravità specifica o densità, g la densità dell' aria, e sarà l' elasticità dell' aria $P = aG$, e la sua massa $m = Lg$. Surrogati nella premessa equazione in cambio di P, e di m i ritrovati valori, ed effettuati i necessarj calcoli, avremo $\frac{2b}{t} \sqrt{\frac{aGb}{g}} = \frac{L}{t}$ velocità del suono, che sendo equabile si eguaglia allo spazio diviso pel tempo, in cui si percorre.

X. Il celebre Signor Eulero è stato il primo, che nella sua Opera *Tentamen novae Theoriae Musicae* abbia osservato, che la corda d' aria rinchiusa in una canna d' organo fa le sue vibrazioni colle medesime leggi d' una corda solida tesa. Quindi la corda d' aria nella canna contenuta, e quella corda solida, che ab-

abbiamo supposta totalmente conforme ad una corda d' aria nella elasticità, nella massa, e nella lunghezza, sarebbero unisone: ma nel tempo, in cui la mentovata corda solida fa una vibrazione, il suono viaggia per uno spazio eguale alla lunghezza di essa corda; dunque anche nel tempo d' una vibrazione d' una canna d' organo il suono si propaga ad una distanza eguale alla lunghezza della corda d' aria dalla canna compresa. Ho piuttosto nominato la lunghezza della corda d' aria che la lunghezza della canna; perchè siccome abbiamo veduto nello Schediasma V. al numero XVI. quella è un poco più grande di questa.

XI. Il suono forte, o debole dipende dalla grandezza maggiore, o minore della spezie c, che dinota lo spazio scorso dalle particole aeree, mentre fanno mezza oscillazione. Ora essendo b il quadrante di circolo descritto col raggio c, ne segue, che qualunque grandezza si assegni a c, è sempre costante il valore della frazione $\frac{2b}{c}$, da cui s' esprime la proporzione del semicircolo al raggio, o pure del circolo al diametro. Questa riflessione ci addita la conseguenza, che i suoni forti, e deboli camminano con pari velocità.

Lo stesso si verifica dei suoni gravi, ed acuti: ed in fatti la velocità del suono $\frac{L}{t}$ s' eguaglia alla quantità $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGb}{g}}$, in cui non c' entra alcun elemento dipendente dalla gravità, e dalla acutezza del suono.

XII. Essendo costante la quantità $\frac{2b}{c}$, ed altresì nella medesima regione la lunghezza b del pendolo a secondi, ne segue che conforme a quanto ha dimostrato il Cavalier Newton nella proposizione XLVIII. del libro secondo dei suoi Principj matematici, la velocità del suono $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGb}{g}}$ sta in ragione composta, diretta sudduplicata della forza elastica dell' aria, o sia del peso premente aG, ed inversa parimente sudduplicata della densità g dell' aria medesima. In una data stagione, purchè non si alteri gran fatto il grado del calore, le densità dell' aria serbano la proporzione dei pesi prementi almeno prossimamen-

te

te; e quindi o cresca, o cali il peso dell' atmosfera, non si turba la velocità del suono. Variata stagione, si muta la relazione fra il peso comprimente, e la densità dell' aria, e questa mutazione diviene notabile nelle stagioni opposte di estate, e d' inverno, nelle quali il suono viaggia con velocità sensibilmente diverse. Ha osservato il dottissimo Sig. Lodovico Bianconi Accademico Bolognese scorrere il suono la distanza dalla Osservanza a Forteurbano, l' estate in secondi 76, l' inverno in secondi pressochè 79. Perciò il suono è alquanto più veloce in quella stagione che in questa nella ragione una mica minore di 79:76, o sia prossimamente come 27:26, ch' è la inversa dei tempi a percorrere lo stesso spazio impiegati. In riguardo alle densità g dell' aria corrispondenti nelle contrarie stagioni allo stesso peso comprimente aG stanno esse in proporzione inversa dei quadrati delle velocità dei suoni $\frac{L^2}{s^2}$, come chiaramente deducesi dalla formola $\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{aGb}{g}}=\frac{L}{s}$, in cui posta costante la quantità $\frac{2b}{c}\sqrt{aGb}$, si trova sempre $\frac{1}{g}$ come $\frac{L^2}{s^2}$. La densità dunque dell' aria d' inverno crescerà sopra quella dell' aria d' estate come $\overline{27}^2 : \overline{26}^2$, o sia adequatamente come 14:13.

XIII. Per ridurre a computo la velocità del suono, cioè a dire lo spazio scorso in un dato tempo, e per esempio in un secondo, egli è d' uopo assegnare alle spezie analitiche componenti la nostra formola i loro valori. Facciasi $s=1$, la frazione $\frac{2b}{c}$ dinotante la relazione fra la circonferenza circolare e il suo diametro $=\frac{355}{113}$, la lunghezza b del pendolo a secondi $=36\frac{17}{24}$ once del piede real di Parigi, l' altezza media, a cui si sostenta il mercurio nel barometro, espressa per $a=28$ once. Resta da determinarsi la quantità $\frac{G}{g}$, o sia la proporzione fra le densità del mercurio, e dell' aria. In due maniere può conteggiarsi la den-

densità dell' aria, o comprendendo con essa, o pure dalla stessa escludendo l' esalazioni terrestri. Nel primo modo stando la gravità specifica del mercurio a quella dell' acqua come 13593: 1000, e la gravità specifica dell' acqua a quella dell' aria mista coll' esalazioni terrestri come 870:1, troveremo la proporzione fra le densità del mercurio, e dell' aria sopraddetta come 1182591:100, e per conseguanza la quantità $\frac{G}{g} = \frac{1182591}{100}$. Sostituiti nella formola $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGh}{g}} = \frac{L}{t}$ gli stabiliti valori, ed adempiute le necessarie operazioni scopriremo che il suono in un minuto secondo dovrebbe scorrere lo spazio $L = 10948$ once $= 912$ piedi parigini, mentre di fatto scorre 12456 once $=$ 1038 piedi.

Ha ottimamente avvertito il Cavalier Nevvton ritrovarsi nell' aria delle particole eterogenee, acquee, terree, saline &c. le quali essendo poco elastiche, e men costipabili, non sono atte a concepire le vibrazioni sonore. Stando adunque queste particole in quiete, il moto sonoro si propagherà per la sola aria vera più celeremente in sudduplicata ragione della minore materia. Leggesi nel secondo tomo del Saggio delle Transazioni Anglicane compendiate dal Signor Levvthorp, che il Signor Derahm ha con accuratissime sperienze trovato camminare il suono con pari velocità, o sia l' aere sereno, o sia offuscato da folta nebbia, nel qual caso è impregnatissimo d' acqua. Conferma ciò a maraviglia l' avvertenza del Signor Nevvton, e ci fa toccare con mano, che quell' accrescimento di densità, che le particole eterogenee producono nell' aria, non va computato, quando si tratti di scoprire la densità dell' aria pura per cui sola, escluse le materie di diverso genere con essa mescolate, si propagano i suoni.

La premessa formola può tornar comoda per istabilire la densità dell' aria sonora, prendendo siccome data la velocità del suono giusta le diligenti esperienze fatte l' anno 1738 dai Signori Cassini di Toury, Abbate della Caille, e Maraldi, le quali c' insegnano, ch' esso viaggia 1038 piedi parigini $=$ 12456 once in un minuto secondo. Effettuati i calcoli in conformità di una tale idea, ci si presenterà $\frac{G}{g} = \frac{15294}{1}$, espres-

sio-

sione, da cui si deduce, che quando nelle stagioni medie di primavera, e d' autunno il suono cammina 1038 piedi in un minuto secondo, la densità del mercurio si riferisce a quella dell' aria pura nella proporzione di 15294: 1.

XIV. Col mezzo della proprietà dimostrata nel numero IX. che nel tempo, in cui una canna d' organo fa una vibrazione, il suono si propaga per lo spazio eguale alla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la canna, si determinerebbe la celerità del suono, purchè fosse nota l' esatta proporzione fra le lunghezze di una determinata canna d' organo, e della corda nella canna rinchiusa. Le lunghezze di una canna d' once 60, e della corda aerea da essa circondata si corrispondano nella ragione $60 : 61 \frac{1}{17}$: e poichè conforme i replicatissimi esperimenti dell' accuratissimo M. Sauveur la corda, che oscilla dentro la nominata canna, fa in un minuto secondo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un' andata, e di un ritorno, equivalenti a 204 numerate all' uso comune; impiegherà in una vibrazione la parte di secondo $\frac{1}{204}$, ed in questo tempo il suono scorrerà lo spazio $61 \frac{1}{17}$ eguale alla lunghezza della nostra corda. Ora essendo gli spazj passati dal suono, che si muove equabilmente, proporzionali ai tempi, avremo $\frac{1}{204} : 1 :: 61 \frac{1}{17} : 12456$, ed il quarto termine dell' analogia ci manifesterà, che il suono in un minuto secondo si diffonde alla distanza d' once 12456 equivalenti a piedi 1038.

XV. Il dottissimo Sig. Luigi de la Grange nelle sue *Ricerche sopra la natura, e la propagazione del suono* contenute nel Tomo primo della Regia Società di Turino condanna il metodo da me seguito, col quale l' incomparabile Cavalier Nevvton la velocità del suono determina, affermando, che questo metodo è fondato sopra due condizioni, che distruggono intieramente quelle, che dipendono dall' azione mutua esercitata dalle particole aeree in virtù delle loro forze repulsive. Le due condizioni sono: prima, che i movimenti di tutte le particole sieno espressi dal medesimo luogo geometrico: seconda, che queste particole si comunichino il moto in tempi uguali, dimodochè

 passi-

paſſino tutte ſucceſſivamente per i medeſimi gradi di velocità: Prima d' ogni altra coſa avverto, eſſere l' idea, che le particole d' aria ſi fuggano con forze in ragione inverſa delle diſtanze, anzi matematica, che fiſica. Ha veduto il Lettore, qualmente nello Schediaſma II. ho ſtabilita la legge, che le denſità dell' aria ſono proporzionali alle forze comprimenti, e per conſeguenza anche alle elaſticità dello ſteſſo fluido, che colle forze comprimenti fanno equilibrio.

XVI. Chiedo permiſſione a queſto illuſtre Scrittore di adattare alla propagazione del ſuono un diſcorſo ſimile a quello, che ho fatto in riguardo alle corde vibranti nei numeri XLVI. e XLVII. dello Schediaſma IV. Le ordinate AD, GH (*Fig.* 30.) della curva DHB ſi eguaglino agli ſpazj ſcorſi per la direzione AB dai punti aerei A, G, quando il ſuono ſi è propagato da A fino in B. Dallo ſpazio AD allo ſpazio nullo paſſati dai punti A, B ſi dee far tranſito gradatamente con qualche legge, che richiedendo d' eſſer fornita del neceſſario requiſito della continuità, ha da poterſi rappreſentare con una curva. Ritenute la preparazione, e le denominazioni del numero VII. ho quivi dimoſtrato, che la particola LG è ſpinta dalla forza ſollecitante $\frac{P\,ddq}{dx}$ proporzionale alla ſeconda differenza della ordinata $GH = q$. Per la ſteſſa ragione la particola ML verrà ſtimolata dalla forza $\frac{P.\,\overline{ddq + d^3q}}{dx}$ proporzionale alla ſeconda differenza della ordinata $LO = q + dq$. Il punto G nel tempo dt ſcorra lo ſpazio $N\sigma = dq$: dimando quale ſpazio nello ſteſſo tempo paſſerà il punto L, ſuppoſto che le forze mentovate imprimano moto ſoltanto nelle riſpettive particole. Chiamo $LO = q + dq = \overset{1}{q}$, e per conſeguenza $PQ = dq + ddq = d\overset{1}{q}$, e $ddq + d^3q = dd\overset{1}{q}$, e nomino altresì u la velocità della particola LG, ed $\overset{1}{u}$ quella della particola uguale ML. Sia inoltre come nel numero IX. a l' altezza, a cui ſi ſoſtiene il mercurio nel barometro, G la ſua gravità ſpecifica o denſità, g la denſità dell' aria, onde s' abbia l' elaſticità della ſteſſa $P = aG$, e la maſſa di ciaſcuna particola LG, ML uguale a $g\,dx$. Avre-

vremo per tanto per le note formole $\frac{aGddq}{dx}.dt = gdx.du$, $\frac{aGddq^{\mathrm{I}}}{dx}.dt = gdx.du^{\mathrm{I}}$; dunque $ddq:du::ddq^{\mathrm{I}}:du^{\mathrm{I}}$: ma $du = \frac{ddq}{dt}$; dunque $du^{\mathrm{I}} = \frac{ddq^{\mathrm{I}}}{dt}$, e quindi se il punto G cammina nel tempo dt lo spazio $NO = dq$, dal punto L si viaggerà nel tempo stesso per lo spazio $PQ = dq^{\mathrm{I}}$, posto che ciascuna forza acceleri solamente la sua particola: condizione necessaria, acciocchè si possano usare le formole sovrapposte.

XVII. Si osservi, che passando il punto G lo spazio NO, ed il punto L lo spazio PQ, &c., la curva DHB si trasferisce per lo spazio $LG = dx$ da A verso B, ed il suono nel tempo dt ha avanzato cammino per l' elemento dx. Si osservi di più, che il punto G passa lo spazio NO un tempicello avanti scorso dal punto L, ed il punto L lo spazio PQ un tempicello avanti scorso dal punto M, e così di mano in mano; laonde tutti i punti fanno transito per gli stessi gradi di movimento regolati sempre dallo stesso luogo geometrico, ed il moto si comunicano in tempi eguali. Queste conseguenze nascono necessariamente dalle formole del Signor Luigi ridotte al giusto, le quali ci guidano alle medesime condizioni Nevvtoniane, che ha giudicato ripugnanti alla natura dell' aria.

Nelle formole $\frac{aGddqdt}{dx} = gdxdu$, $\frac{aGddq^{\mathrm{I}}dt}{dx} = gdxdu^{\mathrm{I}}$, &c. relative alle particole LG, ML, &c. si sostituiscano in cambio di du, du^{I} i determinati valori $\frac{ddq}{dt}$, $\frac{ddq^{\mathrm{I}}}{dt}$, &c., e trovando $\frac{aGddqdt}{dx} = \frac{gdxddq}{dt}$, $\frac{aGddq^{\mathrm{I}}dt}{dx} = \frac{gdxddq^{\mathrm{I}}}{dt}$, &c., ci accorgeremo, che ciascuna ci dà $aGdt^2 = gdx^2$, o sia $\sqrt{\frac{aG}{g}}.dt = \pm dx$, ed integrando senza l' aggiunta della costante, perchè si suppone, che nel punto A co-

 min-

minci la propagazione del suono, $\sqrt{\frac{aG}{g}}$. $t = \pm x$. Volendo esprimere il tempo per secondi, e dinotando $\frac{2b}{c}$ la relazione fra la circonferenza del circolo ed il suo diametro, ed b la lunghezza d' un pendolo a secondi, la formola prenderà l' aspetto seguente $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGb}{g}} = \pm \frac{x}{t}$; e ci manifesterà che la velocità del suono non dipende nè dalla curva D H B, nè dallo spazio minore o maggiore, per cui rendendo un suono piano o forte si movono le particole aeree, nè dal tempo più breve o più lungo impiegato a percorrerlo, nel quale l' acutezza o la gravità del suono consiste, ma soltanto dalla quantità $\sqrt{\frac{aGb}{g}}$; ch' essa velocità è equabile, stando costantemente lo spazio scorso come il tempo speso a passarlo; e che finalmente il suono ugualmente si diffonde e da A verso B, e per la direzione contraria.

Ha creduto il nostro celebre Autore, che ad ogni particola L G, M L corrispondesse una formola diversa, e che integrando tutte queste equazioni, e raccogliendo i valori per ciascuna incognita q, q^{I} q^{II}, &c. espressi per la stessa variabile t, si potessero determinare i movimenti di tutte le particole, per le quali il suono propagasi. Ma sendosi da me dimostrata l' identità delle mentovate formole, chiaramente si scopre, che i predetti valori trovar non si possono, e che dai movimenti delle particole aeree la velocità del suono non ha dipendenza.

XVIII. Benchè non riesca di scoprire la curva D H B, si stabiliscono nulladimeno alcune proprietà, delle quali esser dee fornita. E primieramente dee toccare nel punto B l' asse A B, ed esser quivi combaciata da una parabola Apolloniana. In fatti supposta B G infinitesima, la forza acceleratrice, che nel principio del moto stimola tutte le particole, fa scorrere alla particola B uno spazietto G H proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo: ma questo tempo sta in ragione dello spazio G B in esso tempo camminato dal suono, dunque G H come $\overline{GB}^2$, e per conseguenza la curva H B è combaciata da una pa-

parabola Apolloniana. Intanto non si trascuri d' inferire, che nel principio del movimento le particole aeree si accelerano colla legge di un grave cadente.

In secondo luogo rispettivamente a quelle particole, che si accelerano, la curva DHB volta il convesso verso l' asse AB, ed in riguardo a quelle, che si ritardano, volge il concavo: condizioni necessarie, acciocchè in un caso le forze spingano da A verso B, e nell' altro da B verso A.

Finalmente se le forze acceleratrici serbino la ragione di una funzione della distanza HE = IG dal punto medio E della vibrazione, la qual funzione sia $= o$, quando la distanza è nulla; il tempo speso a scorrere lo spazio GH seguirà la proporzione dell' arco corrispondente BK di una specie di ellisse, di cui BKF è un quadrante. Conciossiachè in questa ipotesi la particola LG in pari distanze HE dal punto E una positiva, e l' altra negativa è dotata della stessa velocità, passerà in ambo i casi lo spazio = NO nel tempo dt; e se la curva DHB determina gli spazj passati dalle particole aeree nell' istante, in cui il punto A ha compiuta una mezza vibrazione, la curva, le cui ordinate pareggiano gli spazj scorsi dalle dette particole nell' istante, in cui dal punto A si è terminata una vibrazione, si formerà replicando il ramo DHB, e collocando il secondo ramo in riguardo al primo come nella figura 16. il ramo SaF rispettivamente al ramo SF.

XIX. Sembra un paradosso al Signor de la Grange, che qualunque sia la legge, colla quale si vibrano le particole aeree, resti sempre costante la velocità del suono. Ma se non si turba la detta velocità, quando le particole d' aria scorrono maggiori, o minori spazj nello stesso tempo, o anche in tempi diversi; e perchè non può rimanere invariata, qualora si muta la legge del moto nelle mentovate particole? Dice il nostro profondo Analista, che siccome una corda solida sollecitata in qualunque modo produce sempre le vibrazioni adattate alla sua natura; così parimente dee avvenire di una corda fluida. Io gli accorderò questo punto: ma nello stesso tempo gli dimanderò, in che consista la vibrazione della corda fluida. Ora io sostengo, che l' essenziale vibrazione di essa corda consiste nella comunicazione del suono dall' una all' altra estremità; la quale si farà sempre nello stesso tempo, in qualsivoglia guisa si vibrino le particelle dell' aria. Il mio argomento acquisterà maggior forza col-

colla rifleffione, che ancora nelle corde folide fi cangia la legge dei movimenti delle particole, e nulladimeno rimane intatto il tempo delle loro vibrazioni. Si adatti la corda ad una delle innumerabili figure nafcenti dalla miftura di varj fuoni, e benchè i moti componenti feguitino la legge dei pendoli a cicloide in riguardo alle diftanze dai punti medj delle rifpettive vibrazioni; i moti compofti, o affoluti cambiano regola, fenza che fi alteri il tempo fpefo in una vibrazione, o fia nel paffare da uno ftato all' altro di quiete.

XX. Si è dato a credere il celebre Sig. Cramer di chiaramente fcoprire l' imperfezione del metodo Nevvtoniano, provando che ammeffo un tal metodo, l' aria fi potrebbe movere colla legge di un grave cadente. Egli è d' uopo quì diftinguere due circoftanze, cioè o che gli fpazj corfi dalle particole aeree fieno minimi fificamente, ovvero di affai maggiore grandezza. Nel primo cafo tanto non è affurdo, che le particole d' aria fi accelerino colla mentovata legge, quanto che ho di fopra moftrato al numero XVIII. che qualunque fia la natura delle loro vibrazioni, nel cominciamento del moto ad effa legge fi adattano.

Che fe fi pretendeffe, che doveffe continuare un tal moto per uno fpazio non minimo; dico che il metodo del Cav. Nevvton è fondato fopra l' ipotefi, che fieno (*Fig.* 30.) NO, PQ minime rifpettivamente ad LG, ML, nè da effa dobbiamo partirci. La legge di moto, di cui fi parla, richiede, che la curva BHD fia una parabola Apolloniana, in riguardo alla quale, comunque fia grande il parametro, fi può fempre determinare una tale affiffa BG, che le linee HN, NO fi corrifpondano in proporzione finita. Ora il fupporre che le particole aeree profeguendo il movimento paffino fpazj $=$ GH maggiori di quello comporta la loro minima compreffione, egli è un totalmente fovvertire il metodo Nevvtoniano. Efige un tal metodo, che le particole aeree fcorrendo fpazj minimi, prima accelerandofi, e pofcia ritardandofi, paffino dalla quiete al moto, ed indi dal moto alla quiete, onde le coftipazioni non formontino mai gli ftabiliti confini.

XXI. Torno allo ftimatiffimo Signor de la Grange, e noto, che le confeguenze dedotte dalla fua foluzione ci fanno toccar con mano, che dalla verità fi allontana. Stabilifce egli adunque che in ciafcuna particola d' aria i movimenti fono ifta-

tantanei, e si comunicano sempre colla medesima velocità costante, qualunque sia l' impulso, che la prima particola abbia ricevuto, dal quale dipende la forza o debolezza del suono. Io non giungo bene ad intendere questi moti istantanei, e non pertanto sensibili, i quali, se pure non prendo errore, non si danno in Natura. La sperienza m' insegna, che al cessare delle vibrazioni sonore, cessa il moto delle particole aeree; e quindi acciocchè una particola si torni a movere, c' è bisogno d' una nuova vibrazione del corpo sonoro. Dunque, dico io, dee prima questa particola accelerarsi, ed indi ritardarsi, ed impiegarci nell' accelerazione, e ritardamento un tempo finito eguale a quello, che spende in una vibrazione il corpo sonoro, che sempre stimola l' aria, ed è la cagione de' suoi movimenti.

Dico di più, che la legge di accelerazione, e di ritardamento ha da dipendere da quella, con cui si vibra il corpo sonoro. Fingasi un corpo, che si vibri con tal legge, che le forze stiano come i quadrati delle distanze dal punto medio della oscillazione, e sia lo stesso unisono ad uno de' nostri corpi sonori, e produca anche un suono ugualmente forte. Sembrami fuori di dubbio, che l' orecchio dovrebbe sentire questi suoni d' indole varia, e pure secondo il nostro Autore non avrebbe da trovarvi differenza veruna.

Egli è noto, che fatta suonare una corda, si pone altresì in tremito una corda vicina corrispondente all' unisono. Se i movimenti dell' aria sono analoghi a quelli della corda agente nelle oscillazioni, e nelle reciprocazioni, chiaramente si vede, che si comunicheranno alla corda unisona, siccome quelli che perfettamente seconderanno le sue vibrazioni.

XXII. Pone il Sig. de la Grange per necessaria conseguenza della sua soluzione la diversità fra i suoni gravi, ed acuti nel numero dei colpi istantanei, che in pari tempo rieceve l' orecchio; ed io sostengo, che ciò non basta. Si diano due corde unisone, che si vibrino colla condizione, che mentre la prima corda ha fatta mezza vibrazione, la corda seconda dia alla vibrazione principio. Ricevendo l' orecchio da queste corde lo stesso numero di colpi, che riceve da una corda sola, che colle predette forme ottava acuta, dovrebbe sentire giusta il Signor de la Grange in ambo le circostanze lo stesso suono, il che alla sperienza ripugna. Al numero dei colpi adunque bisogna aggiungere la durazione dei

dei colpi medesimi accompagnata dal loro regolare aumento, e decremento.

XXIII. Debbo per altro render giustizia al nostro quanto dotto, altrettanto ingenuo Filosofo, il quale cangiata opinione nelle *Novelle Ricerche sopra la natura e la propagazione del suono*, che si leggono nel secondo Tomo della Regia Società di Turino, afferma alla pag. 50. che l' agitazione di ciascuna particola dura precisamente quel tempo, che l' onda ci mette a percorrere tutta la sua larghezza, e che tutte le particole soggiacciono alla medesima agitazione dipendente dalla natura di tutto l' impulso primitivo.

XXIV. Il Cavalier Nevvton nel determinare la velocità del suono ha seguito il metodo ricordato dall' incomparabile Galileo, di appoggiarsi ai fenomeni, e di dedurne dimostrativamente le conseguenze. Gl' insegnavano gli esperimenti, che il suono propagasi equabilmente per l' aria, e che questa ci porta all' orecchio fra gli altri suoni anche quelli, che sendo costanti di tuono, differiscono solamente nel piano e nel forte. Da una tal proprietà egli dedusse, che siccome un corpo sonoro, il quale facendo le sue vibrazioni più ristrette, o più dilatate non cangia tuono, dee necessariamente vibrarsi colla legge di un pendolo a cicloide; lo stesso ha parimente da succedere nelle particole d' aria poste in agitazione dal detto corpo. Restava da vedersi, se le particole collocate nella stessa linea, o raggio, che ha per centro un punto del corpo sonoro, si vibrino per eguali spazj, o pure se questi spazj vadano scemando, secondochè le particole aeree sono più lontane dal corpo, che suona. Tentò adunque cosa accadeva supponendo eguali gli spazj mentovati, e vedendo che nell' aria, le cui forze elastiche sono proporzionali alle densità, ne nascevano tali costipazioni, che determinavano le forze acceleranti ciascuna particola in ragione delle distanze dal punto medio della oscillazione giusta la legge dei pendoli cicloidali; si rese certo, che si vibrano per eguali spazj le particelle dell' aria collocate nello stesso raggio sonoro. Stabiliti questi dati, gli riuscì facile di ritrovare la velocità, colla quale il suono propagasi. Una tale strada, che penso abbia guidato alla meta il Cavalier Nevvton, mi sono adoperato di porla in chiaro nella presente Dissertazione I. Continuerò l' intrapreso cammino nelle Dissertazioni seconda, e terza, sperando di maggiormente dilucidare la materia, che abbiam per le mani. DIS-

DISSERTAZIONE II.

Della propagazione del suono per linee o raggi, supponendo, che al crescere della distanza dal corpo sonoro, le particole aeree si vibrino per ispazj, che vadano decrescendo.

I. NElla precedente Dissertazione ho supposto, che il suono si propaghi per innumerabili raggi, che tutti partono dal centro sonoro, e che lungo questi raggi ciascuna particola aerea si vibri per eguali spazj colle leggi d' un pendolo a cicloide. Dalle compressioni poi, che un tal moto genera nell' aria, le cui densità sono proporzionali alle forze comprimenti, ho dimostrativamente dedotto, che le forze acceleranti le particelle dell' aria stanno come le distanze dal punto medio della oscillazione; proporzione necessaria, acciocchè il nostro fluido possa colla supposta legge oscillare. Ora ritenuta l' ipotesi che il suono si diffonda per raggi, m' avanzo a provare che le particole aeree non ponno vibrarsi a guisa d' un pendolo a cicloide, quando gli spazj delle loro oscillazioni sieno ineguali, e vadano scemando, secondochè le particole sono più rimote dal centro sonoro; imperciocchè in tal circostanza le forze acceleratrici non abbracciano la dovuta ragione delle lontananze dal punto medio delle vibrazioni.

II. Quindi deducasi essere stato a torto accusato di petizion di principio l' incomparabile Signor Newton, quando supponendo, che le particole si vibrino non altrimenti che un pendolo a cicloide, dalle costipazioni cagionate nell' aria ha ricavato le forze acceleratrici convenienti al movimento supposto. Se il raziocinio del grande Inglese fosse al mentovato vizio soggetto, si dovrebbero trovare le forze acceleratrici proporzionali alle distanze dal punto di mezzo delle oscillazioni anche quando le particole dell' aria non si vibrano per eguali spazj, ma in tal caso, come vedremo, le dette forze sono regolate da una legge totalmente diversa; dunque il Cavalier Newton non è caduto in petizione di principio.

Maravigliosa cosa si è quanti Uomini sommi, e di prima sfera abbiano trovato che ridire nel metodo del Sig. Newton. L' opposizioni del Sig. Luigi de la Grange le ho già riferite. Il Signor Eulero nella Dissertazione della natura del fuoco §. 28.

 ebbe

ebbe per sospetta la Newtoniana dimostrazione, affermandola appoggiata a deboli fondamenti. Vuole il Signor Alembert nel Trattato de' fluidi lib. 2 cap. 4. §. 219. che non v' abbia nell' Opera del Newton luogo più difficile, e più oscuro di questo. Nella stessa guisa si esprime il Signor Giovanni Bernoulli nella Dissertazione della propagazione del lume §. 70. Nasconderfi un non so che di surrettizio nel detto luogo il Sig. Cramer deduce da ciò, che con egual successo la dimostrazione Newtoniana si può applicare ad una conclusione totalmente diversa, e anche falsa. Gli stessi Comentatori del Newton Le Seur, e Jacquier aderirono all' opinione del Cramer, e la confermarono con un esempio. Finalmente il dottissimo P. D. Paolo Frisi nelle Novelle letterarie pubblicate dal celebre Signor Ab. Lami il mese di Febbrajo nell' anno 1755. condanna di manifesta petizione di principio la Newtoniana dimostrazione.

Io dovrei cedere certamente, se vivessimo in un secolo, in cui dall' autorità si lasciasse vincere la ragione; ma la riflessione fatta poco innanzi libera infallibilmente il Signor Newton dalla nota di petizion di principio. Gravissima a prima vista sembra l' opposizione del Signor Cramer, che col metodo Newtoniano si possono attribuire all' aere infinite leggi tutte fra loro diverse di oscillazioni, e sarebbe insuperabile, quando si avverasse, che l' aria non può vibrarsi, salvo che a guisa di un pendolo a cicloide. Questo fluido frattanto è capace d' innumerabili movimenti regolati da leggi sommamente varie, all' uno o all' altro de' quali dalla diversità delle cagioni estrinseche resta determinato. Se la penna d' un salterello nel gravicembalo sia troppo rigida, stirerà soverchiamente la corda, e conforme ho parimente avvertito nella Dissertazione I. le sue prime vibrazioni non soggiaceranno alla legge di quelle d' un pendolo a cicloide. Di simile natura altresì saranno le vibrazioni da principio comunicate all' aria, la quale porterà all' orecchio un suono falso, ed ingrato. Si dice con verità che nella propagazione del suono l' aria si vibra non altrimenti che un pendolo a cicloide; perchè da un tal canone vengono regolate le oscillazioni d'un corpo qualunque sonoro atto a produrre un suono costante in riguardo al grave, e all' acuto, e perchè le mentovate oscillazioni passano dal corpo sonoro all' aria, la quale siccome ha dimostrato il Cavalier Newton può in se ricevere questo moto.

III.

III. Ma essendo ormai tempo di accingersi alla trattazione del proposto argomento, sia a b (*Fig.* 31.) la metà della lunghezza di un onda o corda aerea, ed il punto a facendo mezza oscillazione per la direzione a b, passi uno spazio eguale alla linea a d normale ad a b. Supponendo descritta la curva d e e, la cui ordinata qualunque g e esprima lo spazio, che scorre il punto g effettuando mezza vibrazione, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

Determinare la curva d h b, *in cui qualsivoglia ordinata* g h *si eguagli allo spazio passato dal punto* g *nel momento, che il punto* a *compiuta mezza vibrazione ha scorso lo spazio* a d.

Colle leggi delle oscillazioni d' un pendolo a cicloide, ed in pari tempo viaggiano i punti G, g (*Fig.* 30. e 31.) per ispazj uguali alle linee G H, g h; G E, g e nell'una e nell'altra ipotesi, che lo spazio passato dalle particole aeree dopo una mezza vibrazione sia costante o variabile. Quindi nominate G E $=$ A D $=$ a d $= c$, g e $= s$, G H $= Q$, g h $= q$, si deduce l' analogia G E : g e :: G H : g h, che mi suggerisce l' equazione $\frac{GE.gh}{ge} = GH$, ovvero usando i simboli analitici $\frac{cq}{s} = Q$, e prese le differenze, $\frac{csdq - cqds}{s^2} = dQ$. Nella Dissertazione precedente (ponendo $AB = ab = \frac{1}{2}L$, $AG = ag = x$, $BKF = b$) abbiamo scoperto $x = \frac{L}{2b} S \frac{-cdQ}{\sqrt{2cQ - Q^2}}$. Sostituiti in vece di Q, e di dQ i ritrovati valori, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà $x = \frac{Lc}{2b} S \frac{-sdq + qds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (1), equazione alla curva cercata d h b.

Posta s costante, ed uguale a c, diviene $ds = 0$, e si torna a

tro-

trovare l' equazione $x = \frac{L}{2b} S \frac{-c\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}}$ adattata alla ipotesi della premessa Dissertazione.

Determinare la forza acceleratrice di qualunque punto g (*Fig.* 31) *dopo che ha camminato lo spazio* $=$ g h $= q$, *e mentre gli resta da passare lo spazio* h e $= s - q$.

IV. Collo stesso discorso usato nella Dissertazione I. si prova, che la particola d'aria l g viene sollecitata dalla forza $\frac{P\,ddq}{dx}$ (dinota P l' elasticità della fibra l g $= dx$ prima d' essere nuovamente compressa) la qual forza divisa per la massa $\frac{m\,dx}{L}$ d'essa fibra o particola si tramuta in acceleratrice $= \frac{LP\,ddq}{m\,dx^2}$ (2).
Prendo le differenze nella equazione (1.), onde s' abbia $\frac{2b\,dx}{Lc} = \frac{-dq}{\sqrt{2sq - q^2}} + \frac{q\,ds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (3), e di nuovo differenziando considerata dx come costante, $ddq = \frac{\overline{s - q}.dq^2}{2sq - q^2} - \frac{q\,ds^2 + q\,dq\,ds}{2s^2 - sq} + \frac{qs\,dds + s\,ds\,dq - q\,ds^2}{s^2}$ (4). Dalla equazione (3.) si raccoglie $dq = \frac{q\,ds}{s} - \frac{2b\,dx}{Lc}\sqrt{2sq - q^2}$, e

$$dq^2 = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}.\overline{2sq - q^2} - \frac{4bq\,dx\,ds\sqrt{2sq - q^2}}{Lcs} + \frac{q^2ds^2}{s^2}.$$

Fatta la sostituzione di questi valori nella formola (4) ci si presenterà, effettuati prima i necessarj calcoli

ddq

$$ddq = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}.\overline{s-q} - \frac{4bdxds\sqrt{\overline{2sq-q^2}}}{Lcs} + \frac{qdds}{s},$$

e dividendo per mdx^2 e moltiplicando per LP,

$$\frac{LPddq}{mdx^2} = \frac{4Pb^2}{Lmc^2}.\overline{s-q} - \frac{4Pbds\sqrt{\overline{2sq-q^2}}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2} \; (5):$$

ma $\frac{LPddq}{mdx^2}$ ſi eguaglia alla forza acceleratrice della particola d' aria lg, o ſia del punto g, dopo che ha viaggiato per lo ſpazio $gh = q$, e mentre gli reſta da paſſare lo ſpazio $he = s - q$; dunque anche l' omogeneo di comparazione eſprime la detta forza.

V. La forza acceleratrice da me determinata ſarebbe proporzionale alla diſtanza $s - q$ dal punto medio della vibrazione, conforme richiede la legge del moto, che ſi ſuppone, ſe la ſua eſpreſſione non conteneſſe ſalvo che il ſolo termine $\frac{4Pb^2}{Lnc^2}.\overline{s-q}$. Nella Diſſertazione I. ho trovato la forza acceleratrice $= \frac{4Pb^2}{Lmc^2}.\overline{c-Q}$. Il coefficiente comune dimoſtra che in ambo le ipoteſi di s coſtante, e di s variabile le particole aeree oſcillerebbero nel tempo ſteſſo, cioè in quel tempo, che impiega in una vibrazione il corpo ſonoro. Queſta rifleſſione ci fa toccare con mano, che ſe le mentovate particole ſi hanno da vibrare non altrimenti che un pendolo a cicloide, ed iſocrone al corpo ſonoro, la ſomma degli altri termini, cioè a dire $-\frac{4Pbds\sqrt{\overline{2sq-q^2}}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2}$ deve uguagliarſi al nulla.

Ciò chiaramente ſuccede nella ſuppoſizione di $s = c$, in cui ds, e dds ſvaniſcono: vediamo ſe il medeſimo poſſa avverarſi in qualche particolar circoſtanza di s variabile.

VI.

VI. Facciasi adunque $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx}+\frac{LPqdds}{msdx^2}=0$, e dividendo per la quantità $\frac{P}{msdx}$, che non può mai essere generalmente uguale a nulla, avremo $-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}+\frac{Lqdds}{dx}=0$ (6). Pongo in vece di dx il suo valore somministratomi dalla equazione (3.), e trovo $-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}+\frac{2bqsdds\sqrt{2sq-q^2}}{c.\overline{-sdq+qds}}=0$, e fatte le debite riduzioni, $2qds.\frac{\overline{-sdq+qds}}{q^2}=sdds$ (7). Anche qui noto non potere generalmente pareggiare il nulla la grandezza $\frac{2b}{c}\sqrt{2sq-q^2}$, per cui la nostra formola si è divisa.

Metto $\frac{s}{q}=z$ (8.), e per conseguenza $-\frac{sdq+qds}{q^2}=dz$, $s=qz$, $ds=qdz+zdq$, $dds=D.\overline{qdz+zdq}$. Effettuate le sostituzioni scopriremo $2q.\overline{qdz+zdq}.dz=qz\,D.\overline{qdz+zdq}$, o sia $\frac{2dz}{z}=\frac{D.\overline{qdz+zdq}}{qdz+zdq}$, ed integrando, 2 log. $z+$ log. $Adx=$ log. $\overline{qdz+zdq}$, e passando dai logaritmi ai numeri loro corrispondenti, $Az^2dx=qdz+zdq$ (9). Conciossiachè per la formola (3) $dx=\frac{Lc}{2b}.-\frac{sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}$, avremo sostituendo qz in cambio di s, e $qdz+zdq$ in cambio di ds, $dx=\frac{Lc}{2b}.\frac{dz}{z\sqrt{2z-1}}$. Pongasi un tal valore nella

equa-

equazione (9.), e ne risulterà $\frac{Lc}{2b} \cdot \frac{Az\,dz}{\sqrt{2z-1}} = q\,dz + z\,dq$, ed integrando, $\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{z+1}\sqrt{2z-1} = qz + B$ (10).

VII. A cagione di determinare la costante B, prendo per mano la formola (8) $\frac{s}{q} = z$, e noto che quando $x = o$, è $s = q = c$, e perciò $z = \frac{s}{q} = 1$. Surrogati questi valori nella formola (10), ne risulterà $B = \frac{ALc}{3b} - c$. Avremo per tanto $\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{z+1}\sqrt{2z-1} = qz + \frac{ALc}{3b} - c$, e ponendo in luogo di z il suo valore $\frac{s}{q}$, e trasportando da una parte all' altra due termini, $\frac{ALc}{6b} \cdot \left| \frac{s+q}{q}\sqrt{\frac{2s-q}{q}} - 2 \right| + c = s$ (11).

VIII. Resta da stabilirsi la grandezza della costante A. La nostra equazione dee verificarsi anche quando posta $x = \frac{1}{2}L = ab$, è $q = o$, nel qual caso s non ha da essere certamente più grande di c; potendosi ben concepire, che le particole aeree, secondochè sono più rimote dal centro fonoro, si vibrino per ispazj sempre minori, ma non mai per ispazj, che vadano continuamente crescendo. Per togliere di mezzo qualsisia equivoco, immaginiamoci l' assissa x talmente prossima al valore $\frac{1}{2}L$, che sia $q = \frac{s}{N}$, esprimendo N un numero infinito. In sì fatta ipotesi avremo $\frac{ALc}{6b} \cdot \left| \overline{N+1}\sqrt{2N-1} - 2 \right| + c = s$, e cancellati i termini incomparabili, $\frac{ALc}{6b} \cdot N^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} + c = s$. Essendo $N^{\frac{1}{2}}$ quantità infinita, per ottenere che s non superi c, e corrisponda ad esso in ragione finita, egli è d' uopo porre A proporziona-

le a

le a $\frac{-c}{N^{\frac{3}{2}}}$ Fingasi l' ordinata q ancora più picciola, onde abbiasi $q=\frac{s}{N^2}$, e l' equazione (11.) prenda la seguente forma $\frac{ALc}{6b}\cdot N^3\sqrt{2}^1+c=s$, e per salvare le notate condizioni, dovrà determinarsi A proporzionale a $\frac{-c}{N^3}$, valore infinitamente minor di quello alla prima ipotesi conveniente.

Conchiudasi, che per soddisfare a tutte le menome grandezze di q, è necessario mettere $A=0$, dimodochè ne risulti $s=c$: e quindi la quantità $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx}+\frac{LPqdds}{msdx^2}$ non può salve le circostanze del problema uguagliarsi a nulla, se non nella supposizione di $s=c$, cioè a dire che tutte le particole aeree situate in un raggio sonoro si vibrino per eguali spazj.

IX. Illustreremo vie più la verità ora dimostrata, supponendo, che la curva dec sia una delle infinite iperbole fra gli assintoti espresse dalla equazione $\frac{ec^n}{s^n}=e+x$ (12.), in cui giusta la condizione del problema posta $x=0$, si trova $s=c$, e determinando il valore o dell' esponente n, o della costante e, che fa svanire la quantità $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx}+\frac{LPqdds}{msdx^2}$. Differenzio la formola (12.), e mi si presenta $-\frac{nec^n ds}{s^{n+1}}=dx$, e nuovamente differenziando, $\frac{\overline{n+1}\cdot ds^2}{s}=dds$. Sostituisco questi valori, e dopo le convenienti operazioni mi si presenta

la

la grandezza, che deve uguagliarsi al nulla

$$\frac{4Pbs^n\sqrt{2sq-q^2}}{mnec^{n+1}}+\frac{\overline{n+1}.LPqs^{2n}}{mn^2e^2c^{2n}}=o\ (13).$$

Ora una tal equazione non può avverarsi relativamente a qualunque coppia di valori corrispondenti di s, e di q, salvo che nella supposizione di e, o di n infiniti. E vaglia il vero, dovendo essere s, e q sempre minori di c, fuorchè nel punto a, la quantità

$$\frac{s^n\sqrt{2sq-q^2}}{c^{n+1}}$$

e più picciola della unità, e quindi il primo termine discende all' infinitesimo, allora che e, ovvero n ascendono all' infinito. Nel secondo termine abbiamo $\frac{s^{2n}}{c^{2n}}=1$ rispettivamente al punto a, ed in riguardo a tutti gli altri punti minore della unità, e perciò anche questo secondo termine diviene minimo, se e, o n sono infiniti. Presa per mano la formola (12.) $\frac{ec^n}{s^n}=e+x$, e fingendo $e=\infty$, cancellata la grandezza x nulla in rispetto di e, troveremo $ec^n=es^n$, e consegnentemente $s=c$. Vogliasi $n=\infty$, ed estraendo nella formola (12.) la radice n, avremo $e^{\frac{1}{n}}.c=\overline{e+x}^{\frac{1}{n}}.s$, o adequatamente $e^0.c=\overline{e+x}^0.s$: ma $e^0=\overline{e+x}^0=1$; dunque altresì in tale ipotesi $s=c$.

X. Ho asserito che l' equazione (13.) non può generalmente verificarsi, se non se nella circostanza di e, o di n infiniti. La formola, ch'esprime la relazione fra s, e q, ci viene suggerita dalle equazioni (1.), e (12.), ed è la seguente

$$\frac{Lc}{2b}S\frac{-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}=\frac{ec^n}{s^n}-e,\ \text{o sia}\ \frac{L}{2b}S\frac{c.-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}+e$$

$- \frac{ec^n}{s^n} = o$. Nel numero III. l' espressione $S \frac{\overline{c. -sdq + qds}}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ l' ho dedotta dall' altra $S \frac{\overline{-cdQ}}{\sqrt{2cQ - Q^2}}$ mettendo $Q = \frac{cq}{s}$; ma l' ultima sommatoria è uguale all' arco di cerchio descritto col raggio c, il cui seno $c - Q = c - \frac{cq}{s} = c. \frac{\overline{s-q}}{s}$; dunque $S \frac{\overline{c. -sdq + qds}}{s\sqrt{2sq - q^2}} =$ Arco Raggio c Seno $c. \frac{\overline{s-q}}{s}$, e perciò $\frac{L}{2b}$. Arco Raggio c Seno $c. \frac{\overline{s-q}}{s} + c - \frac{ec^n}{s^n} = o$ (14).

Conciossiachè questa formola è costantemente uguale a nulla, assegnata ad s, q qualsivoglia coppia di valori relativi; se ciò si adempiesse anche nella formola (13.), dovrebbe darsi identità fra le due formole, conseguenza patentemente falsa, quando e, ed n stieno dentro i limiti del finito. Che se e, od n si suppongono infiniti, l' equazione (13.) si trova sempre uguale a nulla, non perchè così richiedano i valori corrispondenti di s, e di q, ma per cagione soltanto della divisione per una grandezza infinita.

XI. Dopo aver letta, e ponderata la dimostrazione, che supposto propagarsi il suono per innumerabili raggi, le particole aeree in rigor matematico deggiono vibrarsi per ispazj uguali, se come richiedono le oscillazioni colla legge dei pendoli a cicloide, le forze acceleratrici hanno da corrispondersi in ragione delle distanze dal punto medio della vibrazione; qualcuno forse mi domanderà, se veramente io sia persuaso, che gli spazj, per cui si vibrano le particole d' aria anche più rimote dal corpo sonoro, non si diminuiscano punto. Rispondo ch' io credo, che i detti spazj vadano calando, e ch' estinguendosi in molta distanza l' oscillazione, si riducano al nulla: ma che penso nel tempo stesso, che decrescano a lentissimo passo; dimodochè sia fisicamente vero che oscillino per uguali spazj le particole situate

nel medesimo raggio poco fra loro distanti. Se n, od e si fingono infiniti nella formola (12), le forze acceleratrici abbracciano geometricamente la proporzione delle lontananze dal punto medio della vibrazione, e lo stesso fisicamente adiviene qualvolta n, ovvero e sieno assai grandi. Nel primo caso gli spazj s scemano infinitamente poco, ed il decremento loro geometricamente trascurasi: nel secondo caso scemano molto poco, ed il loro calo si può trasandare fisicamenre. Non altrimenti nelle corde sonore, quantunque ad ottenere un matematico isocronismo le vibrazioni maggiori, e minori abbiano ad essere infinitesime, esso isocronismo fisicamente persevera anche nelle minime oscillazioni. Ella è massima incontrastabile, che passando dalla geometria alla fisica, alle quantità infinitamente picciole le minime finite sempremai corrispondono.

XII. Se mi venisse obbiettato supporsi da me, e non provarsi nella presente Dissertazione, che o si vibrino successivamente le particole aeree per eguali, o per ineguali spazj, il suono si diffonda alla medesima lontananza nel tempo d' una oscillazione del corpo sonoro, soggiungerei che questo è un fatto, e non un' ipotesi. E per verità scorrendo il suono un determinato spazio nel tempo di una vibrazione del corpo sonoro, mi sono posto a cercare, se movendosi le particelle dell' aria una dopo dell' altra o per eguali, o per ineguali spazj colla legge d' un pendolo a cicloide, ne risultino forze proporzionali allo distanze dal punto medio della oscillazione, e trovando ciò avverarsi soltanto nella prima circostanza, ho conchiuso, che le particole aeree per eguali spazj fanno le loro successive vibrazioni unisone a quelle del corpo sonoro.

Per togliere nulladimeno questo scrupolo, benchè insussistente, dimostro doversi stabilire, che nel tempo di una vibrazione del corpo sonoro il suono si propaghi alla stessa distanza, o si vibrino le particole aeree per eguali spazj, o pure si finga che questi spazj sieno ineguali. Ritenute l' altre denominazioni (*Fig.* 30. e 31.) pongo ab $= \frac{1}{2} L^{I}$, ag $= x^{I}$, ml $=$ lg $= dx^{I}$, e la massa del filo aereo, la cui lunghezza L^{I}, $= m^{I}$. Avremo GE : ge :: GH : gh, e per conseguenza $Q = \frac{cq}{s}$, quando $r : s :: Q : q$

 sia

sia AB : ab :: AG : ag, dalla quale analogia ne nasce l' e-
$L : L^1 :: x : x^1$

quazione $x = \frac{Lx^1}{L^1}$. Nella formola $x = \frac{L}{2b} S \frac{\overline{cdQ}}{\sqrt{2cQ - Q^2}}$ somministratami dalla Differtazione I. fostituisco in cambio di x, Q, dQ i convenienti valori, e scopro $x^1 = \frac{L^1 c}{2b} S \frac{\overline{-sdq + qds}}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (15).

Lo stesso discorso posto in uso nella Differtazione I. al numero VII. mi guida a rinvenire la forza acceleratrice della fibra $1g = \frac{L^1 Pddq}{m^1 dx^1 dx^1}$. Col mezzo della formola (15.) si faccia svanire prima ddq, ed indi dq, conforme mi sono adoperato nel numero IV. e ci si presenterà la detta forza

$$\frac{L^1 Pddq}{m^1 dx^1 dx^1} = \frac{4Pb^2}{L^1 m^1 c^2} \cdot \overline{s - q} - \frac{4Pbds\sqrt{2sq - q^2}}{m^1 csdx^1} + \frac{L^1 Pqdds}{m^1 sdx^1 dx^1},$$

la quale nel punto b, dove $q = 0$, si uguaglia a $\frac{4Pb^2 s}{L^1 m^1 c^2}$. Nella supposizione, che tutte le particole aeree si vibrino per lo spazio c ho trovata la forza acceleratrice $= \frac{4Pb^2 . \overline{c - Q}}{Lmc^2}$, e questa nel punto B pareggia la quantità $\frac{4Pb^2 c}{Lmc^2}$. Ora vibrandosi in tempi eguali i punti b, B, le forze acceleratrici deggiono essere proporzionali alle distanze $bc = s$, $BC = c$ dai punti medj c, C delle oscillazioni; e perciò $\frac{4Pb^2}{L^1 m^1 c^2} = \frac{4Pb^2}{Lmc^2}$, e confe-

guen-

guentemente $L^I m^I = Lm$: ma chiamata g la densità dell' aria, $m^I = L^I g$, $m = Lg$; dunque $L^I L^I g = LLg$, e finalmente $L^I = L$, come si dovea dimostrare.

DISSERTAZIONE III.

Della propagazione del suono per settori sferici.

I. MI propongo in questa terza Dissertazione da esaminare, se l' aria possa vibrarsi colla legge dei pendoli a cicloide nella supposizione che il suono per settori sferici si propaghi. Se il suono si diffonde per raggi, le particole aeree situate fra due raggi vicini non fanno moto; ma posto che si propaghi per settori sferici, l' oscillazione si comunica da uno strato all' altro del settore, nè in qualunque strato c' è particola alcuna, che non si vibri. Nella prima supposizione per opera d' una vibrazione del corpo sonoro si muove in ogn' istante una data massa; imperciocchè se nel fine dell' onda una particola d' aria comincia ad oscillare, nel principio dell' onda un' eguale particola si pone in quiete. Non così succede nella seconda supposizione, diventando sempre maggiore la massa, che si vibra, secondochè l' onda si va più allontanando dal centro sonoro; perchè lo strato ultimo, che comincia a vibrarsi, è più grande del primo, in cui cessa l' oscillazione; e solamente l' onda contiene una massa costante, quando è dal detto centro infinitamente rimota.

Determinare la curva, in cui qualsivoglia ordinata si eguagli allo spazio passato da un corrispondente strato dell' onda aerea nell' istante, che il primo strato compiuta una mezza vibrazione ha corso uno spazio dato.

II. Sia rbaf (*Fig.* 32.) il settore sferico (la cui base baf suppongo minima, e quadrata) pel quale si diffonde il suono, e sia di più a il principio, e b la metà dell' onda. Tagliato il nostro settore con due sezioni aai, gas parallele a baf, che passino per li punti a dato, e g scelto ad arbitrio, si cerca

(*Fig.*

(Fig. 31, e 32) lo spazio g h passato dalle particole aeree contenute nella sezione g 2 s nell' istante, in cui le particole a 2 i compiuta mezza vibrazione hanno scorso lo spazio a d, e ciò nella ipotesi che la curva d e c determini lo spazio g e, per cui facendo la metà d' una oscillazione viaggiano le particole g 2 s. Alla soluzione del presente problema ci conduce il medesimo raziocinio adoprato nel numero III. della seconda Dissertazione; e quindi nominate come nel luogo citato a d $= c$, a b $= \frac{1}{2} L$, a g $= x$, g e $= s$, g h $= q$, scopriremo $x = \frac{Lc}{2b} S \frac{-s dq + q ds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (1).

Determinare la forza acceleratrice delle particole d' aria contenute nella sezione qualunque g 2 s (Fig. 31. e 32.) dopo che hanno camminato per lo spazio g h $= q$, e mentre rimane loro da passare lo spazio h e $= s - q$.

III. Segno g l $=$ l m $= dx$, e tirate nella Fig. 31. le ordinate l o, m q, delineo h n, o p parrallele ad a b, che taglino n o $= dq$, p q $= dq + ddq$. Nella Fig. 32. per li punti l, m faccio passare le sezioni l 2 t, m 2 u parallele a b 2 f. Stabilita r a $= r$, a 2 a $= \frac{c}{N}$, e conseguentemente la sezione quadrata a 2 i $= \frac{c^2}{N^2}$, scopriremo le sezioni g 2 s $= \frac{\overline{c + x}^2}{N^2}$, l 2 t $= \frac{\overline{c + x + dx}^2}{N^2}$, m 2 n $= \frac{\overline{c + x + 2dx}^2}{N^2}$. Essendo lo strato l 2 s $=$ g 2 s . g l, se ne determina facilmente il valore, onde s' abbia l 2 s $= \frac{\overline{c + x + dx}^2}{N^2}$. Per una simile ragione ci si presenterà m 2 t $= \frac{\overline{c + x + dx}^2 . dx}{N^2}$.

Ora

Ora egli è d' uopo fupporre (*Fig.* 31, e 32), che i punti g, l, m, e con effi anche le fezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u fi fieno moffi da a verfo b per gli fpazj gh $= q$, lo $= q + dq$, mq $= q + 2dq + ddq$. Acciocchè non ci refti vano fra il noftro fettore e i contigui, bifogna che quando le fezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u hanno viaggiato per gli fpazj q, $q + dq$, $q + 2dq + ddq$, fieno crefciute quanto richiede il fettore medefimo, dimodochè fieno divenute uguali alle tre fuperficie $\frac{\overline{e+x+q}^2}{N^2}$,

$$\frac{\overline{e+x-dx+q+dq}^2}{N^2},\quad \frac{\overline{e+x-2dx+q+2dq+ddq}^2}{N^2}.$$

In quefto fteffo incontro fi fcopre gl $= dx - dq$, lm $= dx - dq - ddq$. Troveremo adunque, allora che fia feguito il nominato movimento, l 2 s $= \frac{\overline{e+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq}}{N^2}$,

$$\text{m 2 t} = \frac{\overline{e+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq}}{N^2}.$$

L' elafticità degli ftrati l 2 s, m 2 t avanti di moverfi, e dopo di aver fatto moto ftanno inverfamente come i loro volumi nella prima, e nella feconda circoftanza. Equilibrandofi la forza elaftica dei nominati ftrati, mentre fono in quiete, col pefo dell' atmosfera, o fia con una colonna di mercurio, la cui altezza moltiplicata nella denfità dello fteffo fi uguagli a P, fi faccia

$$\overline{e+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq} : \overline{e+x}^2 \cdot dx :: P : \frac{P \cdot \overline{e+x}^2 \cdot dx}{\overline{e+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq}},$$

$$\overline{e+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq} : \overline{e+x-dx}^2 : dx ::$$

$P : \frac{P \cdot \overline{e+x-dx}^2 \cdot dx}{\overline{e+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq}}$; e gli ultimi termini

ni delle analogie dinoteranno le altezze del mercurio moltiplicate nella densità d' esso corpo, che fanno equilibrio colle elasticità degli strati l 2 s, m 2 t, posciachè le sezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u hanno scorso gli spazj g h $= q$, l o $= q + dq$, m q $= q + 2dq + ddq$.

La sezione l 2 t, che separa i due strati l 2 s, m 2 t, è stimolata da l verso b dalla differenza delle ritrovate quantità moltiplicata nella detta sezione. Prendendo la indicata differenza, sarà essa $=$

$$\frac{P.\overline{e+x-dx}^2.dx}{\overline{e+x+q-dx-dq}^2.\overline{dx-dq-ddq}} - \frac{P.\overline{e+x}^2.dx}{\overline{e+x+q}^2.\overline{dx-dq}} = \frac{P.\overline{e+x-dx}^2.\overline{e+x+q}^2.\overline{dx-dq}}{\overline{e+x}^2.dx}$$

$$-\frac{P.\overline{e+x}^2.\overline{e+x+q-dx+dq}^2.\overline{dx-dq-ddq}}{\overline{e+x}^4.dx}$$, ed

adempiuti i necessarj calcoli, trascurando le grandezze relativamente nulle, la determineremo $= \frac{Pddq}{dx} - \frac{2Pdq}{e+x} - \frac{2Pqdx}{\overline{e+x}^2}$.

Posta infinita la distanza r a $= e$ del centro sonoro dal principio dell' onda, svaniscono i due ultimi termini, e resta $\frac{Pddq}{dx}$ grandezza, che s' eguaglia alla forza sollecitante l'elemento dx del raggio sonoro fornito di grossezza costante, conforme ho determinato nelle dissertazioni prima, e seconda. In fatti nella mentovata ipotesi il suono si propaga per linee adequatamente parallele, e contenendo l' onda aerea una massa costante, egli è lo stesso, come se il tremito sonoro si diffondesse per raggi.

Dalle cose poco davanti dette raccogliesi, che lo strato l 2 s verrà sollecitato dalla forza $= \overline{\frac{Pddq}{dx} - \frac{2Pdq}{e+x} - \frac{2Pqdx}{\overline{e+x}^2}} . \frac{\overline{e+x}^2}{N^2}$.

IV. Per far transito dalla forza sollecitante all' acceleran-

te,

te, egli è d' uopo dividere la prima per la massa dello strato 1 2 s da essa posto in moto. Alla lunghezza L dell' onda intera corrisponde quella del settore $= e+L$, la base dello stesso $= \frac{\overline{e+L}^2}{N^2}$, ed il suo volume $= \frac{\overline{e+L}^3}{3N^2}$. Sottratto da questo il volume r a 2 i $= \frac{e^3}{3N^2}$, resta il volume dell' onda $=$

$\frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3N^2}$. Il volume dello strato 1 2 s si adegua ad

$\frac{\overline{e+x}^2 \cdot dx}{N^2}$. Si chiami M la massa dell' onda, e la seguente analogia $\frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3} : \overline{e+x}^2 \cdot dx ::$

$M : \frac{\overline{e+x}^2 \cdot 3Mdx}{3e^2L+3eL^2+L^3}$ ci somministrerà il valore della massa contenuta nello strato minimo 1 2 s. Dividasi adunque la forza sollecitante sopra scoperta per questa massa, e ci si presenterà la cercata forza acceleratrice $= \frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3MN^2} \cdot \frac{Pddq}{dx^2}$

$- \frac{2Pdq}{\overline{e+x} \cdot dx} - \frac{2Pq}{\overline{e+x}^2}$ (a):

Avverto, che fingendo r a $= e = \infty$, cancellati i termini incomparabili, la formola si riduce così $\frac{e^2LPddq}{N^2Mdx^2}$, ed a prima vista non si accorda con quella delle due precedenti Dissertazioni. Si rifletta frattanto, che quivi ho espressa la massa m per la

 lun-

lunghezza L dell' onda moltiplicata per la densità g dell' aria, onde s' abbia $m = Lg$. Ma nella presente Dissertazione il giro del raziocinio richiede $M = \frac{3c^2L + 3cL^2 + L^3}{3N^2} . g$, e supponendo $c = \infty$, $M = \frac{c^2 L g}{N^2}$. Perciò nella detta ipotesi scopriremo $M = \frac{m . c^2}{N^2}$ (3). Sostituito questo valore in cambio di M nella formola $\frac{c^2 L P d d q}{N M d x^2}$, ne risulterà come nelle citate Dissertazioni la forza acceleratrice $= \frac{L P d d q}{m d x^2}$.

Dalla formola (1) ho dedotto nella seconda Dissertazione il valore di $dq = \frac{q ds}{s} - \frac{2 b d x}{L c} \sqrt{2sq - q^2}$, di

$$ddq = \frac{4 b^2 d x^2}{L^2 c^2} . \overline{s-q} - \frac{4 b d x d s \sqrt{2sq - q^2}}{L c s} + \frac{q d d s}{s}.$$

Facio la sostituzione di questi valori nella equazione (2), e trovo la forza acceleratrice nel sito $g = \frac{3c^2 L P + 3 c L^2 P + L^3 P}{3 M N^2}$.

$$\frac{4b^2}{L^2 c^2} . \overline{s-q} - \frac{4 b d s \sqrt{2sq - q^2}}{L c s d x} + \frac{q d d s}{s d x^2} -$$

$$\frac{2 q d s}{\overline{c+x} . s d x} + \frac{4 b \sqrt{2sq - q^2}}{L c . \overline{c+x}} - \frac{2q}{\overline{c+x}^2} \quad (4).$$

V. E qui fa di mestieri determinare la relazione fra s, ed x. Sembrami evidente, che communicandosi il tremito sonoro da strato a strato, da onda ad onda, e poichè l' aria è un fluido elastico nulla perdendosi in confusione, due strati diversi, dopo che

che hanno compiuta la metà d' una vibrazione, sieno forniti di pari forze vive. Così allora che l' onda si sia infinitamente allontanata dal centro sonoro, onde $ra = e = \infty$, e conservando essa la sua massa costante, segua lo stesso effetto, come se il suono si fosse propagato per raggi; accaderà che le particole contenute in diverse sezioni $a2i$, $g2s$ scorrano spazj uguali: condizione, come ho dimostrato, necessaria in tale circostanza, acciocchè possa l' aria oscillare colla legge d' un pendolo a cicloide.

Segno $ak = dx$, e pel punto k faccio passare la sezione $k2y$ parallela all' $a2i$. Le masse dei due strati $a2y$, $l2s$ serbano la ragione dei loro volumi prima, che succeda alcun moto, cioè a dire di $\frac{e^2 dx}{N^2} : \frac{\overline{e+x}^2 \cdot dx}{N^2}$. Facendo i detti strati una semivibrazione scorrono, quello lo spazio $ad = c$, e quello lo spazio $gb = s$, e proporzionali ad essi spazj sono le velocità acquistate nel punto della metà della oscillazione: ma per le cose dette debbono eguagliarsi le loro forze vive; dunque ridotto il calcolo troveremo $e^2 c^2 = \overline{e+x}^2 \cdot s^2$, e per conseguenza $\frac{ec}{s} = e + x$ (5). Prendo le prime, ed indi le seconde differenze, posta dx costante, e mi si presenta $-\frac{ec\,ds}{s^2} = dx$, $dds = \frac{2\,ds^2}{s}$. Sostituisco nella equazione (4) in cambio di $e+x$, di dx, e di dds gli scoperti valori, ed ho espressa con quantità finite la forza acceleratrice nel sito g, effettuate le necessarie operazioni,

$$= \frac{\dfrac{3e^2LP + 3eL^2P + L^3P}{2MN^2}}{\dfrac{4b^2}{L^2c^2} \cdot \overline{s-q} + \dfrac{8hs\sqrt{2sq - q^2 + 2qs^2}}{Lc^2e\;c^2e^2}},$$

quando si ammetta l' ipotesi, che il suono per settori sferici si propaghi.

 VI.

VI. Non può sussistere negli strati componenti l' onda il moto vibratorio, che abbiamo supposto colle leggi di un pendolo a cicloide; perchè le forze acceleratrici non accettano la ragione delle distanze $s-q$ dal punto medio della vibrazione. Ed in fatti dal numero X. della Dissertazione II. raccogliesi

$x=\frac{L}{2b}$. Arco Raggio c Seno $\frac{c\,.\,\overline{\overline{s-q}}}{s}$, e dalla formola (5)

$x=\frac{ec}{s}-e=\frac{e\,.\,\overline{c-s}}{s}$, dunque $\frac{L}{2b}$. Arco Raggio c Seno

$\frac{c\,.\,\overline{\overline{s-q}}}{s}=\frac{e\,.\,\overline{c-s}}{s}$, equazione totalmente diversa da quella, che risulterebbe dal porre $\frac{8bs\sqrt{2sq-q^2}}{Lc^2e}+\frac{cqs^2}{c^2e^2}$ uguale a nulla, ovvero proporzionale ad $s-q$, acciocchè le forze acceleratrici si corrispondessero nella ragione, che richiede l' oscillazione supposta.

Perciò mi sia lecito di ripetere, che contro giustizia il Cavalier Newton viene accagionato di petizion di principio, quando tratta delle vibrazioni dell' aria nella diffusione del suono. Se il suo progresso fosse vizioso, si dovrebbero trovare le forze acceleranti proporzionali alle lontananze dalla metà della oscillazione anche nell' ipotesi, che il suono per settori sferici si propaghi: ma in tale incontro le forze acceleranti non abbracciano la detta legge; dunque il Signor Newton non pecca di petizion di principio.

Fingasi infinita la distanza $ra=e$ dell' onda dal centro sonoro, e cancellati i termini incomparabili, troveremo la forza acceleratrice dello strato $12s=\frac{4e^2Pb^2}{MN^2Lc^2}\,.\,\overline{s-q}$: e conciossiachè nella supposizione di $e=\infty$ abbiasi per la formola (3) $M=\frac{me^2}{N^2}$, ovvero $MN^2=me^2$, e per la formola (5) $s=c$; surrogati questi valori, ci si presenterà la mentovata forza $=$

$= \frac{4Pb^2 . \overline{c-q}}{mLc^2}$ come nella prima Dissertazione; mantenendosi in tal caso adequatamente costante la massa dell' onde, e comunicandosi il moto non altrimenti, che per raggi sonori.

VII. Dai premessi discorsi si deduce una importantissima avvertenza, ed è che quando si dice diffondersi il suono sfericamente all' intorno del corpo sonoro; la proposizione è soggetta ad equivoco, ed abbisogna di spiegazione. Posto che s' intenda propagarsi il suono per infiniti settori sferici, l' asserzione è falsa; perchè ammessa una sì fatta dilatazione, le forze acceleratrici non serberebbero la ragione delle distanze dal punto medio della vibrazione, e le particole aeree non potrebbero oscillare a guisa di un pendolo a cicloide, il che ripugna ai fenomeni. Che se si afferma, propagarsi il suono per tanti raggi, o linee aeree, che partono dal centro sonoro per tutte le direzioni, la proposizione è vera, e tutte le conseguenze, ch' indi si deducono, vanno perfettamente d' accordo colla esperienza.

Questi raggi sonori sono talmente spessi, che in que' siti, dove il suono giunge a farsi sentire, non c' è minimo spazio, che non ne contenga moltissimi. Il numero loro per altro atto a colpire una data superficie decresce in ragione reciproca duplicata delle distanze dal centro sonoro; e perciò finalmente si giunge a tali lontananze, ch' entrando pochissimi raggi nell' orecchio, non cagionano in esso impressione sensibile. Si aggiunga, che il moto loro ha, benchè lentamente, da calare, e finalmente da estinguersi; conforme ho notato nel numero XI. della seconda Dissertazione, e quindi il vigore del suono scema in una proporzione alquanto maggiore della inversa dei quadrati delle distanze. Le verità spiegate intorno al suono si adattano interamente alla luce, purchè, siccome io giudico, dalle vibrazioni del corpo lucido, che si propagano per l' etere, venga prodotta.

DISSERTAZIONE IV.

Esame della formola dal Signor Leonardo Eulero abbracciata nella dissertazione sopra la natura del fuoco, la quale determina la velocità della propagazione del suono nell' aria.

I. IL rinomatissimo Signor Leonardo Eulero nella dissertazione sopra la natura del fuoco determina la velocità del suono con una formola, che discorda dalla Newtoniana, a cui parimente dai miei raziocinj sono stato guidato. Introducendo nella formola del Signor Eulero la densità dell' aria mista colle particole eterogenee, che si raccoglie dalle osservazioni, ci dà essa la velocità del suono maggiore della vera; imperciocchè dovrebbe viaggiare piedi Parigini 1162 in un minuto secondo, nel quale effettivamente non ne scorre salvo che 1038. Ora se la velocità riesce soverchia, quantunque la densità dell' aria si supponga più grande del giusto, che succederebbe poi, se si mettesse a computo la densità molto minore dell' aria pura, la quale sola, conforme ha notato il Cavalier Newton, è atta a ricevere, ed a tramandare le vibrazioni sonore? Benchè questa sola avvertenza faccia toccar con mano la falsità della formola del Signor Eulero, nulladimeno ho presa risoluzione di farne un diligente esame, e se pure non prendo errore, mi è riuscito di dedurre dalla stessa un fisico assurdo, che al giudicio di chi legge sottopongo presentemente.

Chiamato P il peso dell' atmosfera, dx la minima costante lunghezza d' una particola aerea, y la distanza dal punto medio della vibrazione, ed L la lontananza, a cui si propaga il suono, mentre il corpo sonoro fa una vibrazione, e posto che la forza sollecitante la particola dx, quando le resta da scorrere lo spazio y per giugnere alla metà della oscillazione, si eguagli a $\frac{16Pydx}{L^2}$, si domanda la velocità, colla quale si propaga il suono, o sia lo spazio da esso scorso in un tempo dato.

II. Sia m la massa della linea aerea L, ed instituita l' ana-

analogia $L : m :: dx : \frac{m\,dx}{L}$, c'insegnerà questa il valore $\frac{m\,dx}{L}$ della massa della particola dx. Divisa la forza sollecitante $\frac{16\,P\,y\,dx}{L^2}$ per la massa $\frac{m\,dx}{L}$ della mentovata particola, ne risulta la forza acceleratrice $\frac{16\,P\,y}{L\,m}$. Si nomini u la velocità della fibra dx, e per le note formole avremo $\frac{16\,P}{L\,m} \cdot - y\,dy = u\,du$, ed integrando, $\frac{16\,P}{L\,m} \cdot \overline{c^2 - y^2} = u^2$. Aggiungo la costante c^2 quadrato di quello spazio c, che scorre la particola dx facendo una semivibrazione. Così nel principio della oscillazione, quando $y = c$, si trova come è dovere $u = o$. Estraendo la radice, e riflettendo essere $u = -\frac{dy}{dt}$ (la specie t dinota il tempo, in cui si passa lo spazio $c - y$) ci si presenterà $4\sqrt{\frac{P}{L\,m}} \cdot \sqrt{c^2 - y^2} = u = -\frac{dy}{dt}$, e conseguentemente $4\sqrt{\frac{P}{L\,m}} \cdot dt = \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, ed integrando, $4\sqrt{\frac{P}{L\,m}} \cdot t = S \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Non si aggiunge costante, perchè senza tale adizione ritrovasi $t = o$, quando $y = c$. Si denomini b il quadrante del raggio c, ed allora, che, dopo compiuta una vibrazione, lo spazio passato si eguaglia a $2c$, ed $y = -c$, avremo $S \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{2b}{c}$. Quindi sarà $4\sqrt{\frac{P}{L\,m}} \cdot t = \frac{2b}{c}$, e perciò $t = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{L\,m}{P}}$.

Sia b la lunghezza d' un pendolo a secondi, il tempo d' una vibrazione del quale si espone per $\frac{2b}{c}\sqrt{b}$. Se vorremo esprimere per secondi il tempo t, in cui la particola dx fa una vi-

brazione, ed il suono si propaga alla distanza L, otteremo l'intento col mezzo della seguente analogia $1 : \frac{2b}{c}\sqrt{b} :: s : \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{P}}$, da cui si deduce $s = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{Pb}}$. Nomino a l'altezza, a cui si sostenta il mercurio nel barometro, G la sua gravità specifica, g la gravità specifica dell'aria, e ne proverrà $P = aG$, $m = Lg$. Avremo per tanto $s = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{L^2 g}{aGb}}$, e conseguentemente $\frac{L}{s} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, formola adottata dal Signor Eulero, che dinota la velocità $\frac{L}{s}$, con cui si propaga il suono, o sia lo spazio L, ch' esso scorre nel tempo dato s espresso in secondi.

Il primo punto A (*Fig.* 33.) *della linea aerea* A B *facendo mezza oscillazione per la direzione* A B *scorra lo spazio eguale alla linea* A D *normale ad* A B, *ed intanto il tremito sonoro si sia propagato da* A *fino in* B. *Nell' istante, in cui il punto* A *giunge al termine del detto spazio, un altro qualsivoglia punto* G *abbia passato lo spazio eguale alla linea* G H *parallela ad* A D. *Si congiungano i punti* D, H, *ed altri similmente determinati colla curva* D H B, *che passerà per il punto* B; *perchè quando* A *ha compiuta una semivibrazione, il punto* B *non si è ancor cominciato a movere. Si dimanda la natura d'essa curva* D H B, *supponendo data come nel numero II. l'espressione della forza sollecitante il punto* G.

III. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC = c$, $AG = DE = x$, $GH = q$, $HE = c - q = y$, e sia P il peso dell' atmosfera, e $\frac{16Pydx}{L^2}$ la forza sollecitante il punto G.

Ho

Ho dimostrato nel numero VII. della prima Dissertazione, che qualunque siasi la curva D H B, il punto G viene sollecitato dalla forza $\frac{P\,d\,d\,q}{d\,x}$. Ci si presenterà dunque l' equazione $\frac{P\,d\,d\,q}{d\,x} = \frac{16\,P\,y\,d\,x}{L^2}$, da cui si deduce $L^2\,d\,d\,q = 16\,y\,d\,x^2$. Essendo $c - q = y$, troveremo $d\,q = -\,d\,y$, e $d\,d\,q = -\,d\,d\,y$. Fatta la surrogazione scopriremo $-\,L^2\,d\,d\,y = 16\,y\,d\,x^2$. Pongo $p\,d\,x = d\,y$, e differenziando, presa al solito per costante $d\,x$, $d\,p\,d\,x = d\,d\,y$, e sostituendo, $-\,L^2\,d\,p\,d\,x = 16\,y\,d\,x^2$, o sia $-\,L^2\,d\,p = 16\,y\,d\,x$; ma $d\,x = \frac{d\,y}{p}$; dunque $-\,L^2\,d\,p = \frac{16\,y\,d\,y}{p}$ ovvero $-\,L^2\,p\,d\,p = 16\,y\,d\,y$, ed integrando, $16\,A^2 - L^2\,p^2 = 16\,y^2$, e dopo fatte le debite operazioni $4\sqrt{A^2 - y} = L\,p$. Ora $p = \frac{d\,y}{d\,x}$, e perciò $4\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{L\,d\,y}{d\,x}$, e conseguentemente $\frac{4\,d\,x}{L} = \frac{d\,y}{\sqrt{A^2 - y^2}}$, e moltiplicando per A, $\frac{4\,A\,d\,x}{L} = \frac{A\,d\,y}{\sqrt{A^2 - y^2}}$. Passo all' integrazione senza aggiungere costante, che in questo caso va ommessa, e scopro primieramente $\frac{A\,x}{\frac{1}{4}L} = S\,\frac{A\,d\,y}{\sqrt{A^2 - y^2}}$, ed indi l' analogia $A : \frac{1}{4}\,L :: S\,\frac{A\,d\,y}{\sqrt{A^2 - y^2}} : x$.

IV. Si determini il raggio C R $= A$ fornito di tal condizione, che descritto il semicircolo Z X R S V, e prolungata la linea A B fin che lo tagli nel punto S, sia l' arco Z X R S doppio del raggio C R $= A$. Segno ad arbitrio C I $= y$, e pel punto I meno I N parallela a C D, che interfechi il nostro semicircolo

nel punto T. Egli è noto essere l'arco $ZT = S \frac{A dy}{\sqrt{A^2 - y^2}}$. Facciasi

$$CR : \frac{1}{2} DC :: \quad ZT \quad : DE,$$

$$A : \frac{1}{4} \quad L \quad :: S \frac{A dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} : x$$

e condotta EG normale a DC, e parallela a CR, taglierà essa la linea IN nel punto H, il quale apparterrà alla curva DHB.

Quando $y = CB = DA = c$, ad x competono due valori $D2E = A2H$, $DC = AB$ determinati dalle analogie

$$CR : \frac{1}{2} DC :: \quad ZTX : D2E = A2H,$$

$$CR : \frac{1}{2} DC :: ZTXRS : DC = AB.$$

Questa ultima analogia dimostra, che rettamente ho stabilito il valore della costante $A = CR$; imperciocchè siccome DC è doppia di $\frac{1}{2} DC$, così l'arco ZTXRS è doppio del raggio CR.

Presa un' assissa x maggiore di D2E, e minore di DC, si trova y maggiore di $CB = DA = c$; e quindi il pezzo di curva a H3 H B giace al di sotto della linea AB. Se si dividerà la linea 2EC per metà nel punto 3E, corrisponderà ad esso la massima ordinata $3E\,3H = y = CR = A$.

V. Ciò che merita distinta riflessione si è, che mentre il punto A facendo mezza vibrazione ha scorso per la direzione AB lo spazio eguale ad AD; un qualunque punto medio fra A, e 2H, per esempio G, avrebbe passato per la medesima direzione lo spazio GH; i due punti 2H, B sarebbero rimasi in quiete; ed ogni punto fra 2H, e B, esempigrazia 3G, si sarebbe mosso con direzione contraria per lo spazio eguale a 3G3H. Non potendosi capire, come a cagion della vibrazione del punto A da A verso B, le particole medie fra i punti quieti 2H, e B possano acquistare un movimento contrario, questa unica considerazione apertamente dimostra, che la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{a \cdot b}{g}}$ non è atta ad esprimere la velocità, con cui si propaga il suono.

DIS-

DISSERTAZIONE V.

Esame della ipotesi proposta dal dottissimo P. D. Paolo Frisi, che sebbene tutte le particole d' aria componenti l' onda nello stesso istante finiscono di muoversi, non cominciano però le loro vibrazioni nell' istante medesimo, di modo che successivamente si propaga il tremito da una all' altra.

I. Avendo comunicata la precedente quarta Dissertazione al celebre P. D. Paolo Frisi, mi propose egli di ricercare, se si potesse salvare la formola dell' acutissimo Signor Eulero, supponendo, che tutte le particole d' aria componenti l' onda, avvegnachè nello stesso momento finiscano di muoversi, non principjno però nell' istante medesimo, di maniera che da una all' altra successivamente il tremito si propaghi. Or ecco ciò ch' è risultato dalle mie indagazioni.

Esaminando la formola dal Sig. Eulero abbracciata, colla quale nella dissertazione sopra la natura del fuoco determina la velocità della propagazione del suono, ho provato che chiamato P il peso dell' atmosfera, y la distanza d' una particola d' aria dal punto medio della vibrazione, L la lontananza, a cui si propaga il suono, mentre il corpo sonoro fa una oscillazione, nella quale e' impieghi il tempo t, m la massa dell' onda, la cui lunghezza L, b la lunghezza d' un pendolo a secondi, a l' altezza, a cui si sostenta nel barometro il mercurio, G la sua gravità specifica, e finalmente g la gravità specifica dell' aria, si verificherà la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, colla quale il lodato Geometra esprime la velocità equabile, con cui si diffonde il suono, quando le particole tutte, ch' io supponeva vibrarsi isocrone, e per eguali spazj, sieno stimolate dalla forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$. La nuova ipotesi del P. Frisi richiede la soluzione del seguente problema.

Posto che tutte le particelle d' aria componenti l' onda comincino successivamente le loro oscillazioni, e le finiscano nello stesso istante, si cerca la forza acceleratrice d' esse particole.

II. Ella è cosa notissima, che se le particole aeree si vibrassero per ineguali spazj in tempi eguali, le forze acceleranti serberebbero la ragione delle distanze dai punti medj delle oscillazioni. Ma se le mentovate particole oscillassero per eguali spazj in tempi ineguali, starebbero le forze acceleratrici inversamente come i quadrati dei tempi stessi, mentre le particelle suddette si trovassero in pari lontananza dal punto di mezzo delle loro vibrazioni. E vaglia il vero, sia c lo spazio scorso dalle particole, quando sono giunte alla metà della vibrazione, y la distanza dal punto medio della oscillazione medesima, t il tempo, in cui si passa lo spazio $c-y$, ky la forza accelerante. Avverto che il coefficiente k è costante in riguardo ad una data particola, e vario relativamente a particole diverse; e che poste due particole ad eguale lontananza y dalla metà della vibrazione, le loro forze acceleratrici si corrispondono nella ragione dei coefficienti k. Dalle formole delle forze continuamente applicate si deduce $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = t\sqrt{k}$: ma se due particole ugualmente distano dal punto medio della oscillazione, la $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ ha rispettivamente ad entrambe lo stesso valore; dunque ciò si verifica parimente della quantità $t\sqrt{k}$, o sia del suo quadrato t^2k. Quindi nelle addotte circostanze sarà k come $\frac{1}{t^2}$, cioè a dire i coefficienti k accetteranno la ragione inversa duplicata dei tempi t impiegati a scorrere gli spazj eguali $c-y$. Fra cotali tempi si comprendono altresì quelli, che si spendono nelle intere vibrazioni quando $c-y=2c$, e per conseguenza i coefficienti k stanno inversamente come i quadrati dei tempi delle oscillazioni: ma conforme ho testè avvertito, in

pari

pari diftanza y dal punto medio delle vibrazioni le forze acceleratrici fi corrifpondono nella proporzione dei coefficienti k; dunque in sì fatti incontri le dette forze abbracciano la ragione reciproca duplicata dei tempi delle ofcillazioni.

Dai due premeffi canoni fi ricava il terzo adattato al cafo, che due particole aeree fi vibrino per ineguali fpazj in tempi ineguali. Le forze acceleratrici fi riferifcono nella ragione compofta $\frac{y}{t^2}$, diretta delle diftanze y dalle metà delle vibrazioni, ed inverfa duplicata dei tempi t nelle ofcillazioni impiegati.

III. Sia A B (*Fig.* 34.) la lunghezza dell' onda, cioè a dire fi propaghi il fuono per lo fpazio A B, mentre il primo punto A dell' onda fa una vibrazione, e fe il fuono fi ha da diffondere colla velocità $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, egli è neceffario nell' ipotefi dal lodato P. Frifi propoftami da efaminare, che la prima particola d' aria A fia ftimolata dalla ftella forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$, che l' animerebbe, fe tutte l' altre particole dell' onda A B fi moveffero ifocrone, e per eguali fpazj. Così in ambo le fuppofizioni il primo punto A vibrafi in pari tempo, e confeguentemente in pari tempo il fuono fcorre lo fpazio $AB = L$.

Se il punto B principia a moverfi dopo il punto A per un tempo proporzionale alla diftanza A B, il punto G (poichè il fuono viaggia equabilmente) darà cominciamento alla fua vibrazione paffato il tempo parimente proporzionale alla lontananza A G: ma giufto la fuppofizione mella il campo dal P. Frifi i punti A, G terminano le loro ofcillazioni nello fteffo iftante, ed il punto A in una ofcillazione, ci fpende il tempo proporzionale ad A B; dunque il tempo confumato dal punto G in una vibrazione fi fcoprirà proporzionale a G B.

Compiuta una ofcillazione, abbia il punto A fcorfo per la direzione A B lo fpazio $AD = 2c$, ed il punto G lo fpazio $GH = 2y$, e ponendo $AG = x$, e confeguentemente $GB = L - x$, il canone terzo ci fomminiftra la feguente analogia $\frac{c}{L^2} : \frac{y}{L^2 - 2Lx + x^2} :: -\frac{16Pc}{Lm} : \frac{-16PLy}{m.L^2 - 2Lx + x^2}$, la quale

le c' insegna, che sendo in tale circostanza la forza acceleratrice del punto $A = -\frac{16Pc}{Lm}$, quella del punto qualunque G preso ad arbitrio si eguaglia a $\frac{-16PLy}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2}$. Ho anteposto alle dette forze il segno negativo; perchè queste spingono per la direzione BA, contraria all' AB, per la quale si suppone che i punti A, G abbiano fatta una vibrazione.

Determinare, ed indi maneggiare l' equazione della curva DHB *(Fig. 34.), le cui ordinate* AD, GH *si eguaglino agli spazj scorsi dalle particole aeree* A, G, *quando hanno compiuta una oscillazione.*

IV. Dal numero VII. della Dissertazione I. raccogliesi, che qualunque sia la natura della curva DHB, la particola d' aria G è stimolata dalla forza sollecitante $= \frac{2Pddy}{dx}$. Si divida questa per la massa della mentovata particola, la cui lunghezza $= dx$, la qual massa si trova eguale ad $\frac{mdx}{L}$, e ne risulterà la forza acceleratrice $= \frac{2PLddy}{mdx^2}$: ma una tal forza nell' antecedente problema l' ho scoperta $= \frac{-16PLy}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2}$; dunque siamo pervenuti alla equazione $\frac{-16PLy}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2} = \frac{2PLddy}{mdx^2}$, e dividendo per $\frac{2PL}{m}$, e cangiando i segni $\frac{8y}{L^2 - 2Lx + x^2} = \frac{-ddy}{dx^2}$, e per conseguenza $\frac{8dx^2}{L^2 - 2Lx + x^2} = -\frac{ddy}{y}$ (1).

Faccio $L - x = r(2)$, dalla qual formola differenziando ne nasce $-dx = dr$, e surrogati questi valori nella equazione (1),

(1), ritrovo $\frac{8dr^2}{r^2} = -\frac{ddy}{y}$ (3). Pongasi $\frac{dr}{r} = dq$ (4), e adempiuta la sostituzione si avrà $8dq^2 = -\frac{ddy}{y}$ (5).

V. Affinchè si faccia transito dalle seconde alle prime differenze, stabilisco $-dy = z\,dq$ (6), e differenziando, $-ddy = z\,ddq + dz\,dq$ (7). Supponendosi costante dx, sarà parimente tale $dr = -dx$. Giacchè per la formola (4) $\frac{dr}{r} = dq$, prese le differenze, ed assunta dr come costante, avremo $-\frac{dr^2}{r^2} = ddq$: ma $\frac{dr^2}{r^2} = dq^2$; dunque $ddq = -dq^2$. Sostituisco questo valore nella equazione (7.), e scoperta $-ddy = -z\,dq^2 + dz\,dq$, faccio uso di tale grandezza nella formola (5.), e mi si presenta $8dq^2 = -\frac{z\,dq^2 + dz\,dq}{y}$. Finalmente pongo in vece di dq il suo valore $-\frac{dy}{z}$ suggeritomi dalla equazione (6.), ed effettuati i dovuti calcoli scopro $-8y\,dy = z\,dy + z\,dz$ (8.), espressione, la quale non contiene, salvo che le sole prime differenze.

VI. Si separano in essa le variabili col metodo del Signor Gabbriello Manfredi, facendo $z = yp$ (9.), onde dopo le convenienti operazioni si trovi $\frac{p\,dp}{p^2 + p + 8} = -\frac{dy}{y}$, ovvero $\frac{p\,dp}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}} = \frac{-dy}{y}$ (10). Sia $p + \frac{1}{2} = s$ (11.), e per conseguenza $p = s - \frac{1}{2}$, $dp = ds$, ed adempiute le so-

stituzioni, e ponendo $\frac{3l}{4} = g^2$ (12.), scopriremo $\frac{s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{\frac{1}{2}\,ds}{g^2+s^2} = -\frac{dy}{y}$, o pure $\frac{g^2.2s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{g^2\,ds}{g^2+s^2} = -2g^2.\frac{dy}{y}$.

Sanno gli analisti essere S $\frac{g^2\,ds}{g^2+s^2}$ eguale ad un arco di cerchio, il cui raggio g, e la tangente s. Questa sommatoria io la segnerò così S$\frac{g^2\,ds}{g^2+s^2} = A.^o R.^o g\,T.^e s$. Integrando adunque ritroveremo g^2 log. $\overline{g^2+s^2} - A.^o R.^o g\,T.^e s = 2g^2$ log. $A - 2g^2$ log. y (13). La costante aggiunta A m' ingegnerò di determinarla nel numero VIII.

VII. Abbiamo per la formola (6) $-dy = z\,dq$, e per la (9) $z = yp$; dunque $-\frac{dy}{y} = p\,dq$. In oltre l' equazione (10) m' insegna essere $\frac{p\,dp}{\overline{p+\frac{1}{2}}^2 + g^2} = \frac{-dy}{y}$, e quindi si trova, fatta la divisione per p, $\frac{dp}{g^2 + \overline{p+\frac{1}{2}}^2} = dq$, o sia ponendo in cambio di dp, e di $p + \frac{1}{2}$ i loro valori ds, s; $\frac{ds}{g^2+s^2} = dq$. E giacchè $dq = \frac{dr}{r}$ (4), adempiuta la sostituzione, ci si presenterà $\frac{ds}{g^2+s^2} = \frac{dr}{r}$, e integrando, $\frac{A.^o R.^o g\,T.^e s}{g^2} =$ log. r (14). Non aggiungo costante perchè è superflua.

VIII. Dall' ultima formola si deduce $A.^o R.^o g\,T.^e s = g^2$ log.

log. r. Sostituisco un tal valore nella equazione (13), ed ho $g^2 \log. \overline{g^2+s^2} - g^2 \log. r = 2g^2 \log. A - 2g^2 \log. y$, e dividendo per g^2, $\log. \overline{g^2+s^2} = 2 \log. A + \log. r - 2 \log. y$. Se fosse $L = 1$, e log. $1 = o$, ne risulterebbe $\log. \overline{g^2+s^2} = \log. \left(\frac{A^2 r}{y^2}\right)$, e per conseguenza $g^2+s^2 = \frac{A^2 r}{y^2}$ (15). Presa nuovamente per mano l' equazione (14). $\frac{A^0.R^0.gT^e.s}{g^2} = \log. r$, e posta $r = L = 1$, ed essendo log. $1 = o$, sarà parimente in tal caso $A^0.R^0.gT^e.s = o$, e perciò $s = o$, eguagliandosi a nulla la tangente di un arco $= o$; e quindi ad $r = L = 1$ ci corrisponde $s = o$. Osservo, che quando (*Fig.* 34.) $r = L - x = BA = L = 1$, l' ordinata $AD = 2y$ si trova eguale a $2c$; laonde in detta circostanza $y = c$. Nella formola (15) si faccia $s = o$, $r = 1$, $y = c$, e scopriraffi $g^2 = \frac{A^2}{c^2}$, e conseguentemente $A = cg$.

Per la qual cosa l' equazione (13) prenderà il seguente aspetto $g^2 \log. \overline{g^2+s^2} - A^0.R^0.gT^e.s = 2g^2 \log. cg - 2g^2 \log. y$, o sia $2.\frac{1}{2} \log. \overline{g^2+s^2} + \log. y - \log. cg = \frac{A^0.R^0.gT^e.s}{g^2}$, o pure $2 \log. \left(\frac{y\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^0.R^0.gT^e.s}{g^2}$.

Cangiata ipotesi, e volendo che sia log. $L = o$, assegnato ad L qualunque valore, avremo $2 \log. \left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^0.R^0.gT^e.s}{g^2}$ (16), nella quale espressione posto l' omogeneo di

di comparazione $=o$, e perciò $s=o$, $y=c$, si troverà, come in fatti dee stare, log. $L=o$.

Costruire la curva dell' antecedente problema.

IX. La costruzione della nostra curva si ottiene col mezzo delle formole (14) (16). Avverto essere $\frac{A^o . R^o . g T^e . s}{g^2} = A^o . R^o . \frac{1}{g} T^e . \frac{s}{g^2}$, la cui secante s' eguaglia ad $\frac{1}{g^2} \sqrt{g^2+s^2}$. L'equazioni adunque (14) (16) si possono esprimer così:

$$\text{log.}\, r = A^o . R^o . \frac{1}{g} T^e . \frac{s}{g^2} \ (14).$$

$$2 \,\text{log.} \left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = A^o . R^o . \frac{1}{g} T^e . \frac{s}{g^2} \ (16).$$

All' assintoto T 5 R (*Fig.* 35) si delinei colla sottotocante $=1$ la logistica S 5 S, a cui si accomodi l'ordinata $RS = L$. Si segni ad arbitrio l' ordinata $BG = r$ uguale all' assissa BG della Fig. 34, e sarà $RB = \text{log.}\, r$. Combinando insieme le formole (14), (16), ne risulta $\text{log.}\, r = 2\,\text{log.} \left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$ (17). Quindi divisa per metà nel punto P la linea $RB = 2\,\text{log.} \left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$, avremo $RP = \text{log.} \left[\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right]$, e per conseguenza l' ordinata $PQ = \frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}$. Taglio $RT = 2c$, e condotta la diagonale ST, tiro ad essa parallela la linea QM. Essendo simili i triangoli SRT, QPM, si verifica l' analogia

SRS

RS : RT :: PQ : PM, o analiticamente

$$L : 2c :: \frac{Ly\sqrt{g^2-s^2}}{cg} : \frac{2y\sqrt{g^2+s^2}}{g},$$

la quale determina $PM = \frac{2y\sqrt{g^2+s^2}}{g}$.

X. Col raggio $GR = \frac{1}{g} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (12). (*Fig.* 36.) descrivasi il circolo RIKLR, ed al punto R si meni la tangente indefinita FE. Facciasi l' arco RB uguale all' affissa RB = log.r della Fig. 35, e per li punti G, B si conduca la retta bE, che interfecherà la tangente FE nel punto E. Si segni

$GM = Gm$ uguale alla linea $PM = \frac{2y\sqrt{g^2+s^2}}{g}$ della Fig.

35, e dai punti M, m si calino le normali MH, mh al diametro RK. Giacchè per la costruzione l' arco RB = log.r, e per la formola (14.) $\log r = A^0 . R^0 . \frac{1}{g} T^c . \frac{s}{g^2}$, ne segue essere $RB = A^0 . R^0 . \frac{1}{g} T^c . \frac{s}{g^2}$: ma in fatti il raggio $GR = \frac{1}{g}$;

dunque la tangente $RE = \frac{s}{g^2}$, e la secante GE si eguaglia a

$\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2}$. La similitudine dei triangoli GER, GMH mi somministra l' analogia

$$\overline{GE} : GR :: \overline{GM} : GH$$

$$\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2} : \frac{1}{g} :: \frac{2y\sqrt{g^2+s^2}}{g} : 2y,$$

da cui impariamo essere $GH = 2y$. Passando perfetta egualità fra i triangoli GHM, Ghm, si truova $Gh = GH$. La direzione opposta frattanto delle mentovate linee ci addita, che a Gh si dee assegnare il valore negativo $= -2y$. Presa per ma-

no l'equazione (17.) $\log. r = 2 \log. \left[\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right]$, e passando dai logaritmi ai numeri, abbiamo $r = \frac{Ly^2 . \overline{g^2+s^2}}{c^2 g^2}$ (18), equazione, da cui si deduce che a un dato valore di r corrispondono due grandezze uguali d' y, una positiva, e l' altra negativa.

Al punto G (*Fig.* 34.) conduco le ordinate GH, Gh eguali alle linee GH, Gh della Fig. 36., ed i punti H, h, ed altri infiniti in simil guisa determinati apparterranno alla curva, che abbiamo presa a costruire.

XI. Stimo cosa opportuna il fare alcune riflessioni intorno l' andamento, e le proprietà della nostra curva. Considererò i soli valori GH $= 2y$ (*Fig.* 36.); imperciocchè tutto quello, che d' essi dirò, si può applicare alle uguali grandezze Gh colla sola differenza, che queste vanno segnate dalla parte opposta.

Se l' arco RB $= A^o . R^o . \frac{1}{g} T^t . \frac{s}{g^2} = o$, ricaviamo dalla equazione (14) $\log. r = o$, e per conseguenza $r = L$, essendosi al numero VIII. supposto $\log. L = o$. Quando RB $= o$, è parimente nulla la toccante RE $= \frac{s}{g^2}$, e perciò $s = o$. Nella formola (18) si faccia $r = L$, $s = o$, e si scoprirà $y = \pm c$. Quindi in tal caso GM $=$ GH $= 2y = 2c$, al qual valore si eguaglia nella Fig. 34. l' ordinata AD corrispondente all' assissa BA $= r = L$.

XII. Mentre gli archi RB (*Fig.* 36.) crescono aritmeticamente, le linee r calano in ragione geometrica. Ciò dipende dall' indole della logistica (*Fig.* 35.), in riguardo a cui i predetti archi formano le assisse RB, e le r le ordinate BG. Chiamo e il quadrante RBI (*Fig.* 36.) e tagliate nella Fig. 35. le assisse R2R $= e$, R3R $= 2e$, R4R $= 3e$, R5R $= 4e$, &c. le ordinate RS, 2R2S, 3R3S, 4R4S, 5R5S, &c. comporranno una serie geometrica. Abbiamo già fatta la linea RS ugua-

uguale a $BA = L$ della Fig. 34. Si stabiliscano in oltre alle ordinate della Fig. 35. $2R2S$, $3R3S$, $4R4S$, $5R5S$, &c. eguali le assisse BC, $B2A$, $B2C$, $B3A$, &c. della Fig. 34. Stando in progressione geometrica le mentovate assisse, costituiranno parimente una simile serie le loro differenze AC, $C2A$, $2A2C$, $2C3A$, &c.. Si riferiranno altresì in serie continue geometriche le BA, $B2A$, $B3A$, &c.; le differenze loro $A2A$, $2A3A$, &c.; le BC, $B2C$, $B3C$, &c.; le differenze loro $C2C$, $2C3C$, &c.

XIII. Passi gradatamente (*Fig.* 36.) l' arco RB dal nulla al quadrante, ed accaderà, che la linea $GH = 2y$ scemi per doppio titolo, e perchè cala l'angolo GMH, cosa per se stessa patente, e che non abbisogna di prova; e perchè cala la linea $GM = \frac{2y\sqrt{g^2+s^2}}{g}$, la quale si è fatta eguale alla PM della Fig. 35. Essendosi tagliata per mezzo la linea RB nel punto P, l'ordinata PQ è media proporzionale fra le due $RS = L$, $BG = r$, e quindi $PQ = \sqrt{Lr}$. ripetuta l' analogia usata al numero IX. $RS : RT :: PQ : PM$,

$$L : 2c :: \sqrt{Lr} : \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$$

scopriremo PM, o sia nella Fig. 36. $GM = \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$, formola, la quale c' insegna, che al calare di r la linea GM decresce: ma all' aumentarsi degli archi RB scemano le r; dunque crescendo i detti archi, cala la linea GM. Dalle cose dette deducasi, che quando l' arco RB s' eguaglia al quadrante RI, le due linee GM, HM coincidono, e la $GH = 2y$ diviene uguale a nulla. All' arco RB uguale al quadrante RI corrisponde nella Fig. 34. $r = BC$, e perciò la curva DHC passerà pel punto C, e procedendo da A verso C, la ordinata anderà continuamente scemando, e diverrà nulla nel punto C.

XIV. Nel punto nominato la nostra curva ha un flesso contrario, per cagione del quale il ramo $C2d2C$, che come vedremo discende al di sotto dell' asse AB, volta allo stesso il concavo, come altresì lo volta il ramo DHC. Richiedono i

flessi

flessi contrarj, che sia o $ddy=o$, o $ddy=\infty$. Dalla equazione (3) deducesi la seguente $\pm\frac{8ydr^2}{r^2}=\mp ddy$, da cui apprendiamo, che posta $\pm y=o$, è parimente $\mp ddy=o$, e che per conseguenza ad $y=o$ corrisponde il flesso contrario.

XV. La Fig. 36. patentemente dimostra, che mentre l'arco RB diviene maggiore del quadrante RI, purchè il punto B cada nel semicircolo IKL, la linea $GH=2y$ comparisce in figura di negativa, passando il punto H nel semidiametro GK. Se l'arco RB si eguaglia al triplo quadrante RIKL, in tal caso $r=B2C$ (*Fig.* 34.). Quindi per tutto il tratto C2C le ordinate $2y$ saranno negative, e la curva C2d2C starà al di sotto dell'asse AB. Noto, che nel sito 2C è nuovamente $2y=o$; perchè il raggio GB (*Fig.* 36.) cade sopra il raggio GL, ed il punto H torna a coincidere col punto G, laonde $GH=2y=o$.

Nel mentovato sito 2C (*Fig.* 34.) la curva ha un flesso contrario per le ragioni poco fa allegate.

XVI. Ora mi faccio ad investigare il massimo valore della ordinata $-2y$ in riguardo al pezzo di curva C2d2C. L'equazione (18) si trasforma così $\frac{cg^2}{L}\cdot\frac{r}{g^2+s^2}=\pm y^2$. Se aumentando per una minima flussione l'arco RB (*Fig.* 36.), le due quantità r, g^2+s^2 decrescono proporzionatamente, non si altera il valore del quadrato y^2, e conseguentemente nè pur quello del lato $\pm y$, per la qual cosa la differenza $\pm dy=o$. Questa circostanza ci da indizio, che l'ordinata $\pm 2y$ è giunta alla massima sua grandezza. Essendo dr la differenza di r, e $2sds$ quella di g^2+s^2, avremo $\frac{dr}{r}=\frac{2sds}{g^2+s^2}$: ma per la formola (14) $\frac{dr}{r}=\frac{ds}{g^2+s^2}$; dunque $2s=1$, o sia $\frac{s}{g^2}=\frac{1}{2g^2}=\frac{2}{31}$, ponendo in cambio di g^2 il suo valore $\frac{31}{4}$. Si faccia la tangente $Re=\frac{s}{g^2}=\frac{2}{31}$, e condotta per li due punti e, G la li-

linea eGN, determinerà essa l' arco RIN, a cui devesi tagliare uguale l' assissa RN (*Fig.* 35.) della logistica $S5S$. S' alzi l' ordinata $NO = r$, e fatta a questa eguale la linea BE (*Fig.* 34.), al punto E corrisponderà la massima ordinata Ef, il valor della quale si stabilisce effettuando le operazioni dalla costruzione prescritte.

XVII. Continuando a crescere l' arco RB (*Fig.* 36.), e divenendo maggiore di tre quadranti $RIKL$, la linea $GH = 2y$ torna positiva, dimodochè si genera nella Fig. 34. il ramo $2C3D3C$. Anche un tal ramo ha le condizioni dell' altro già descritto $C2d2C$; imperciocchè succede in $3C$ un flesso contrario, e l' ordinata $2E2F$ è fornita del massimo valore. Si trova il punto $2E$ facendo l' assissa $P2N$ della logaritmica (*Fig.* 35.) eguale all' arco $RIKLn$ (*Fig.* 36.), e tagliando $B2E$ nella Fig. 34. eguale all' ordinata $2N2O$ della Fig. 35.

XVIII. In sì fatta guisa proseguirà la curva (*Fig.* 34.) $DC2d2C3D3C$ &c., la quale è una specie di anguinea, che taglia l' asse AB in punti infiniti C, $2C$, $3C$, &c., in riguardo ai quali si verifica la proprietà notata al numero XII, che le distanze BC, $B2C$, $B3C$, &c. dal punto estremo B dell' onda formano una serie continua geometrica decrescente. La nostra curva ha un altro ramo $dC2D2C3d3C$ &c. affatto simile, ed uguale al mentovato, se non che va collocato a rovescio.

XIX. Se più archi RB (*Fig.* 36.) differiscono per un semicircolo, il che si avvera degli archi in serie o, RIK, $RIKLR$, &c., allora i triangoli GHM riescono simili, e le $GH = 2y$ serbano la proporzione delle $GM = \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$. Perciò in tale incontro le ordinate della curva espressa nella Fig. 34. stanno come le radici delle assisse. Le assisse corrispondenti alla serie degli archi recata in esempio sono BA, $B2A$, $B3A$, &c., e quindi le ordinate AD, $2A2D$, $3A3D$, &c., o pure le rispettivamente uguali Ad, $2A2d$, $3A3d$, &c. si riguarderanno nella ragione di $\sqrt{BA} : \sqrt{B2A} : \sqrt{B3A}$, &c.: ma BA, $B2A$, $B3A$, &c. compongono una serie geometrica, conforme ho avvertito al numero XII., dunque sarà parimente geometrica la serie $\sqrt{BA}$, $\sqrt{B2A}$, $\sqrt{B3A}$, &c., e per consequen-

feguenza le ordinate A D, 2 A 2 D, 3 A 3 D, &c. procederanno in geometrica progreffione. Le maffime ordinate E F, 2 E 2 F, &c., ovvero E f, 2 E 2 f, &c. godono della medefima prerogativa.

XX. Tutta la curva delineata non ferve all' ipotefi propofta dall' acutiffimo P. Frifi. Si debbono fcegliere quelle porzioni, nelle quali fecondo l' equazione (3) $\frac{8ydr^2}{r^2} = -ddy$, o pure $-\frac{8ydr^2}{r^2} = ddy$ alle ordinate $2y$ pofitive corrifpondono le feconde fluffioni ddy negative, o tutto al contrario alle ordinate $2y$ negative corrifpondono le feconde fluffioni ddy pofitive. Si verifica ciò nei rami parte fuperiori, e parte inferiori all' affe A B, che nella Fig. 37. fi veggon defcritti. Nei rami fuperiori D C, F 2 C, 2 F 3 C, &c. ogni ordinata $GH = 2y$, che fi confidera come pofitiva, efprime quello fpazio, che il punto G dopo compiuta una vibrazione ha fcorfo per la direzione A B, per la quale fi fuppone, che parimente abbia fatta una ofcillazione il corpo fonoro. Nei detti rami, che voltano il concavo verfo l' affe A B, crefcendo le affiffe $BG = r$, crefcono altresì le ordinate $GH = 2y$, ma con tal legge che i loro elementi $2dy$, o le metà dy vanno fempre diventando più piccioli, fecondochè fi aumentano le B G. Sono negative adunque le feconde differenze ddy, mentre le ordinate G H fon pofitive.

Segno a deftra, ed a finiftra del punto G le due particole d' aria G I, G K, la cui pari lunghezza s' eguagli all' elemento coftante dr. Alzate dai punti I, G, K le ordinate I L, G H, K M, tiro L O, H N parallele all' affe B A. Dopochè finita una vibrazione i punti I, G, K hanno paffato gli fpazj I L, G H, K M per la direzione A B, e fono ridotti in quiete, la particola G I fi è coftipata per la fluffione maggiore O H, e la particola G K per la fluffione minore N M. Quindi il punto aereo G è fpinto da G verfo A, e quefta forza lo ftimola a tornar indietro, e a dar principio alla reciprocazione.

XXI. Qualunque ordinata $QT = -2y$ dei rami inferiori C f, 2 C 2 f, &c. fa figura di negativa, dinotando lo fpazio, per

cui

cui si è mosso da B verso A il punto Q, dopo di aver terminata una oscillazione con direzione contraria a quella del corpo sonoro. Conciossiachè i nostri rami volgono il concavo all' asse A B, e crescendo le assisse B Q, calano le ordinate Q T, ma con differenze sempre maggiori; interviene che alle dette ordinate negative corrispondono le ddy positive.

Taglio come sopra $QR = QP = dr$, descrivo le ordinate RV, QT, PS, e tiro poscia SZ, TX parallele all' asse A B. Abbiano i punti P, Q, R scorsi gli spazj PS, QT, RV per la direzione BA, e compiuta una vibrazione, la particella PQ si troverà più compressa della QR, essendo la flussione ZT, per cui si ristrigne la prima particola, maggiore della flussione XV, per cui ristrignesi la seconda. Perciò il punto Q verrà stimolato a reciprocare da Q verso B.

XXII. Applicando gli addotti discorsi (*Fig.* 34) ai rami inferiori dC, f2C, 2f3C, &c., ed altresì ai superiori CF, 2C2F, &c., agevolmente si scoprirebbe non poter essi servire alla ipotesi del lodato P. Frisi; imperciocchè si verificherebbe l' assurdo, che le particole aeree dopo terminata una oscillazione verrebbero ancora sollecitate a seconda della oscillazione medesima; laonde dovrebbero continuare il moto, mentre la supposizione richiede, che abbiano da tornare indietro.

XXIII. Rivolgo dunque nuovamente gli occhi alla Fig. 37., ed osservo, che per un altro motivo coi rami superiori DC, F2C, &c. si debbono accoppiare gl' inferiori Cf, 2C2f, &c. Dall' uno, e dall' altro lato di un punto immobile, e per esempio di C, si tagli $Cd = Ca = dr$, e si menino le ordinate dg, ab. Essendo nel sito C $ddy = o$, come ho avvertito al numero XIV., passerà una squisita eguaglianza fra le ordinate dg, ab, ciascuna delle quali s' eguaglia a $2dy$. Finita una vibrazione dal punto a per la direzione A B, e dal punto d per la direzione contraria BA, le particole Ca, Cd restano del pari costipate per gli elementi eguali ab, dg, ed essendo il punto C tolto in mezzo da forze eguali, ed opposte, rimane immobile, conforme la costruzione richiede. A chi s' immaginasse di sostituire al ramo inferiore Cf il superiore CF(*Fig.* 34), si potrebbe suggerire la riflessione, che mentre la particola Ca (*Fig.* 37.) si ristrigne per la lineetta ab, l' altra particola Cd si dilaterebbe altrettanto, e venendo spinto il punto C da C

 ver-

verso B, sarebbe impossibile, che conservasse la quiete.

Resta per tanto fermamente stabilito, che i soli rami nella Fig. 37. delineati alla supposizione del dottissimo P. Frisi si adattano.

XXIV. Ora egli è d' uopo considerare, se quei movimenti, che secondo l' ipotesi, di cui si tratta, dovrebbero animare le particole aeree, possano loro realmente e fisicamente competere. Nella vibrazione del corpo sonoro scopro la ragione, per cui tutt' i punti contenuti nella porzione d' onda A C s' abbiano da movere per la stessa direzione da A verso B. Rimanendo frattanto immobile il punto C, io non giungo a capire da qual meccanismo possa procedere, che tutt' i punti fra C ed E oscillino al contrario per la direzione B A. Di più l' aria E 2 C in cambio di secondare il moto dell' aria E C, tutto a rovescio si vibrerebbe da A verso B, incontrandosi il fisico assurdo, che due particelle d' aria situate in E, l' una all' altra vicine prima della oscillazione, si troverebbero separate finita la vibrazione per la distanza f F. Chi mi sa insegnar quella molla, che nei mentovati due punti aerei, massimamente dopochè sono disuniti, genera il movimento? Gli stessi inconvenienti notati nella porzione C 2 C dell' onda A B, si rinovellano nelle parti dell' onda medesima 2 C 3 C, 3 C 4 C, &c. infinite di numero, ed in progressione geometrica decrescenti.

XXV. Si vuole in oltre osservare, che le particole d' aria contenute nell' onda A B ricevono dal corpo sonoro la forza viva acquistata nell' oscillare. Ora non sarebb' egli un patentissimo assurdo, se mi riuscisse di provare che la forza viva delle nominate particole, e delle altre tutte poste in movimento supera quella del corpo sonoro? Una minima porzioncella d' una corda di metallo, che si vibra, generi moto in innumerabili raggi sonori, che hanno per centro la detta particola, tra i quali si conti l' onda A B. La particella d' aria A tocchi la corda, e secondi squisitamente il suo movimento, dimodochè l' una, e l' altra oscillino con pari celerità. Vibrandosi le particole aeree A, G colle leggi dei pendoli a cicloide, le loro velocità in punti analoghi, per esempio alla metà delle oscillazioni, stanno in ragione composta, diretta degli spazj A D, G H, che scorrono oscillando, ed inversa dei tempi, che impiegano in una vibrazione, i quali tempi serbano la ragione di

B A:

BA: BG, conforme al numero III. ho provato. Il punto G cada in uno de' siti (*Fig.* 34.) 2 A, 3 A, &c., e pel numero XVIIII. sarà AD: GH:: $\sqrt{BA}$: $\sqrt{BG}$. Le velocità dunque delle particole A, G abbraccieranno la proporzione $\frac{\sqrt{BA}}{BA}$: $\frac{\sqrt{BG}}{BG}$, o sia l' equivalente $\frac{1}{\sqrt{BA}}$: $\frac{1}{\sqrt{BG}}$, e perciò i loro quadrati staranno inversamente come BA: BG. La particola della corda si divida in tanto numero N di parti eguali, quanti sono i raggi sonori dal movimento d' essa particola cagionati nell' aere, e facendo che BA: BG abbia o eguale, o maggior ragione di quella, che passa fra la parte $\frac{1}{N}$ della massa della particola di metallo, e la massa della particola d' aria G; si determinerà il sito G contenente una particella d' aria, la cui forza viva è uguale, o maggiore di quella della porzione $\frac{1}{N}$ della menzionata particola della corda. Alla forza viva della particola G si aggiungano tutte le forze vive, di cui nello stesso istante sono fornite tutte l' altre particole contenute nell' onda A B, e ne risulterà un aggregato di forze vive, che moltissimo supererà quella della parte $\frac{1}{N}$ della particola di metallo. Finalmente le forze vive di tutti i raggi sonori, il cui numero N, destati nell' aria dal tante volte nominato elemento della corda si unifcano in una somma, e si scoprirà essere questa assaissimo più grande della forza viva del predetto elemento. Quello, che si è detto d' una particola della corda, s' applichi a tutte l' altre, e si conchiuda che nella ipotesi da me esaminata l' effetto supererebbe di gran lunga la propria cagione.

Avverto, che la supposizione non si potrebbe ammettere, nè pur quando richiedesse, che la forza viva trasfusa nell' aria da una vibrazione della corda pareggiasse quella della corda medesima. Insegnandoci l' esperienza, che una corda sonora fa numerosissime oscillazioni prima di ridursi alla quiete, dobbiamo conchiudere che per cagione d' una sola vibrazione passa nell' aria pochissima forza viva.

XXVI. Un faciliſſimo eſperimento c' illumina, che l' onde aeree non ponno vibrarſi conforme la ſuppoſizione dal celebre P. Friſi propoſtami da eſaminare. Ammeſſa queſta ſiccome vera, la particola G (*Fig.* 37.) ſpenderebbe in vibrarſi un tempo tanto più picciolo, quanto foſſe più vicina al punto eſtremo B dell' onda A B. Quindi ogni particola renderebbe un ſuono diverſo, il quale ſi udirebbe ſempre più acuto, ſecondochè l' orecchio s' accoſtaſſe al fine dell' onda: ma in qualunque ſito G ſcelto ad arbitrio io ſento lo ſteſſo ſuono uniſono a quello del corpo ſonoro; dunque le oſcillazioni dell' onda A B non ſi conformano all' ipoteſi del P. Friſi.

XXVII. Conchiudo il preſente eſame colla rifleſſione, che il moto non potrebbe paſſare da un' onda all' altra, ma nella ſola onda prima A B ſarebbe coſtretto a fermarſi. Con qual legge di continuità ſi può far tranſito dalla quiete del punto B al movimento per lo ſpazio eguale ad A D del punto immediatamente vicino, col quale principia l' onda ſeguente: dal tempo nullo, che il punto B ſpende a vibrarſi, al tempo finito, che c' impiega il punto contiguo?

Il notato aggregato d' inconvenienti cancella, ſiccome io penſo, l' ipoteſi per me eſaminata dal libro della Natura.

APPEN-

APPENDICE
ALLO
SCHEDIASMA IV.

I. NEll'ultimo numero dello Schediasma IV. ho affermato, che se la corda vibrandosi un solo suono produce, dee prendere una delle figure da me determinate: ma se, come realmente succede, col suono principale 1 della corda intera sono misti i suoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. delle sue parti aliquote; si compongono insieme i moti proprj delle figure 15, 16, 17, &c., ed innumerabili nuove figure ne nascono. Essendomi stata richiesta una distinta dichiarazione di questa composizione di figure, e di moti, ho presa risoluzione di effettuar ciò nella presente Appendice: tanto più che il chiarissimo Signor Luigi de la Grange ingenuamente confessa (a) di non essere ancora giunto a poter spiegare la moltiplicità dei suoni armonici, che si fanno sentire battendo una sola corda.

II. Conciossiachè le nostre figure sieno infinite, mi ristrignerò a mostrare la costruzione delle due più semplici; riuscendo poi facile il passare alle più composte. E primieramente si uniscano insieme nella figura 38. le due curve BDF2DA, BGC2GA delle figure 15, 16, a cui si adatta la corda AB, quando trema intera, o divisa in due parti eguali. L'ordinata HD corrispondente al punto H preso ad arbitrio si continui verso E quanto basta, e tagliata DE = HG, pel punto E, e per altri infiniti similmente determinati si faccia passare la curva BEF2EA, che sarà quella, a cui si conforma la corda nel primo de' suoi stati di quiete.

Passata la quarta parte del tempo impiegato dalla corda, che oscilla intera, in una vibrazione; la stessa corda, che si vibra come divisa in due parti eguali, ha compiuta una mezza oscil-

(a) *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis privatæ Taurinensis Tom. I. pag. 109.*

oscillazione, ed in questo istante si accomoda ad una figura analoga alla BDF2DA. Dopo mezza vibrazione della corda intera, ed una vibrazione della corda bipartita, prende essa la figura BGC2GA ma collocata negativamente. Torna poscia a coincidere con una figura analoga alla Bdf2dA, posciachè sono scorse tre quarte parti del tempo d' una vibrazione della corda intera, e la corda divisa in due ha fatte tre mezze vibrazioni. Finalmente terminata una vibrazione della corda intera, e due vibrazioni della corda distribuita in due parti eguali, ond' essa corda sia pervenuta al secondo stato di quiete, sarà la stessa fornita della figura Bef2eA nascente dallo stabilire de = HG, o pure dal girare la curva BEF2EA prima intorno l' asse CF, indi attorno l' asse BA.

Questa proprietà, che nei due stati di riposo le curve si alternino, di modo che sia BEF2EA = A2efeB, è comune a tutti que' casi, nei quali col suono 1 della corda intera s' accoppia uno, o più suoni espressi dai numeri pari 2, 4, 6, 8, &c. Avvertasi in oltre, che nella stessa supposizione i punti della corda non giungono alla linea retta BCA nel medesimo istante; imperciocchè quando il punto F è pervenuto in C, il punto E è trascorso oltre il punto H per uno spazio = HG, ed al contrario al punto 2E per giugnere fino in 2H resta da passare uno spazio = 2H2G.

III. M' innoltro alla costruzione delle curve, alle quali nel primo istante della oscillazione dee accomodarsi la corda, quando congiuntamente produce i suoni 1, 3, che le competono, secondochè si vibra intera, o divisa in tre parti eguali. Colla curva (*Fig.* 39, 40) BDF2DA della figura 15 si unisca la curva BGS2G2S3GA della figura 17, che può avere due differenti positure, come nelle citate figure 39, e 40, e pel punto qualunque H tirata l' ordinata HD, che si continui se fa bisogno, si tagli DE = HG, ed il punto E, ed altri infiniti similmente determinati apparterranno alla curva BEN2E2N3EA; di cui ci siamo proposta la costruzione.

Dopo il tempo d' una semivibrazione delle tre parti eguali della corda, si farà essa conformata ad una figura analoga alla BDF2DA. Compiuta mezza vibrazione della corda intera, e tre mezze vibrazioni delle sue terze parti, si troverà nella linea retta BCA; e perciò tutti i suoi punti nello stesso istante alla

alla mentovata linea pervengono: il che generalmente addiviene, qualora col suono 1 della corda totale sono misti i suoni 3, 5, 7, &c. della medesima corda divisa in uno, o più numeri impari di parti eguali. Assume poscia nuovamente la figura analoga alla Bdf2dA, passato che sia il tempo di $\frac{5}{2}$ vibrazioni della corda compartita in tre porzioni eguali, e per ultimo dopo una vibrazione della corda intera, e tre delle sue terze parti, giunge essa corda al secondo stato di quiete, avendo presa la figura Ben2e2n3eA uguale alla BEN2E2N3EA: circostanza, che sempre si avvera, ogni volta che col suono 1 sono incorporati i suoni espressi dai numeri impari.

IV. Siccome colle due curve delle figure 15, 16 si compongono le curve (*Fig*. 38.) BEF2EA, Bef2eA atte a rendere la mistura di suoni 1, 2; così colle due curve ultimamente nominate, e colla curva della figura 17 si formeranno le curve, poste le quali si sentirà l' aggregato di suoni 1, 2, 3. Col mezzo di queste curve, e di quelle, a cui si adatta la corda divisa in quattro parti eguali, si determineranno le curve, alle quali dee conformarsi la corda, se ha da' produrre unitamente i suoni 1, 2, 3, 4. In sì fatta guisa si può far transito alla descrizione delle curve sempre più composte, che un maggior numero di suoni mescoleranno con quello della corda totale.

V. Finora ho sempre unito col suono della corda intera quelli delle sue parti aliquote: vediamo presentemente cosa succeda, quando si congiungono insieme i suoni di due, o più parti aliquote.

Si accoppino nella figura 41 le curve BDC2DA, BGS2E2S3GA delle figure 16, e 17, e fatta DE=HG, si descriva col solito metodo la curva BEN2E2N3EA, a cui conformata la corda, si vibrerà bipartita, e tripartita, e produrrà i suoni 2, 3. Nell' istante, in cui la corda divisa per metà ha fatto una vibrazione, la stessa corda partita in tre membri eguali ne ha compiuta una e mezzo, e si trova fornita della figura BDC2DA capovolta intorno all' asse AB. Ora questo non è uno stato di quiete; perchè la corda in tre porzioni distribuita si muove, essendo alla metà d' una sua vibrazione. Acciocchè ritorni allo stato di quiete, egli è d' uopo, che la corda si sia vibrata due volte come divisa in due parti, e tre vol-

volte come scompartita in tre membri, impiegandoci in questo ritorno il tempo d' una vibrazione della corda intera, ch' io esprimo per l' unità. In tale incontro è fornita essa corda della figura 42, B e n 2 e 2 n 3 e A, che separo dalla 41 per evitare la confusione.

VI. Il passare frattanto da uno stato all' altro di quiete, è lo stesso, che il fare una vibrazione, e rendere il suono corrispondente al tempo speso nel detto passaggio: ma al tempo 1 è relativo il suono 1 conveniente alla corda intera; dunque l' unione dei due suoni 2, 3 proprj della corda bipartita, e tripartita genera il suono 1 competente alla corda intera. Lo stesso effetto producono i suoni di tutte quelle due, o più parti aliquote, che sono dinotati da numeri fra loro primi; perchè in tutte queste circostanze si richiede il tempo 1, acciocchè la corda ritorni allo stato di quiete.

Che se si congiungessero due, o più suoni di tali parti aliquote, che fossero indicati da numeri non fra loro primi; ne nascerebbe il suono uguale alla massima loro comune misura; a cagione che nel tempo d' una vibrazione di questo suono la corda passa da uno stato all' altro di quiete. Tremi la corda divisa in 4, 6, 8 parti eguali, e renda i suoni 4, 6, 8, ed accadendo, che ricuperi lo stato di quiete dopo due vibrazioni delle parti $\frac{1}{4}$ A B, tre delle parti $\frac{1}{6}$ A B, e quattro delle parti $\frac{1}{8}$ A B, cioè a dire nel tempo $\frac{1}{2}$ corrispondente alle vibrazioni delle parti $\frac{1}{2}$ A B, ne risulterà il suono 2 massima comune misura dei suoni 4, 6, 8.

Si avverta per altro, che se la massima comune misura fosse uguale al suono più grave, non nascerebbe nuovo suono; imperciocchè la corda ritornerebbe allo stato di riposo nel tempo d' una vibrazione della parte aliquota maggiore, che rende il detto suono più grave. Supposto che per esempio si uniscano nella medesima corda A B i suoni 2, 4, 6, convenienti alle parti aliquote $\frac{1}{2}$ A B, $\frac{1}{4}$ A B, $\frac{1}{6}$ A B, la massima comune misura dei quali pareggia il suono più grave 2, riacquisterà essa corda lo stato di quiete nel tempo d' una vibrazione delle parti aliquo-

te

$n \frac{1}{2}$ A B, e non si genererà nuovo suono.

Sembrami, che la riflessione del ritorno della corda da uno stato all' altro di quiete rischiari vie più la mia spiegazione fisica della sperienza dell' altre volte lodato Sig. Giuseppe Tartini contenuta nei numeri XXV, XXVI, e XXVII. dello Schediasma IV; intendendosi per tal mezzo con maggior evidenza qualmente i suoni espressi da numeri fra loro primi di due parti aliquote producano il suono della corda totale.

VII. Opporrà qualcuno, che la spiegazione del terzo suono sarebbe chiarissima, se le corde aeree, che portano i suoni all' orecchio, si vibrassero come le solide: ma essendo le oscillazioni loro d' indole affatto diversa, non si fa capire in qual modo ad esse la spiegazione si adatti. Nelle corde solide tutte le particole principiano, e finiscono nello stesso istante le vibrazioni, che si fanno per la direzione normale alla loro lunghezza; e quindi ogni volta che le corde suddette si ritrovano in uno stato di quiete, questa proprietà è comune a tutte le particole, onde sono composte. I punti estremi rimangono immobili, e ciò succede ancora in alcuni punti di mezzo, quando tremano divise in parti eguali, ed il riposo di essi punti non è turbato dall' accoppiamento di qualche altra maniera di oscillazione. Al contrario le particole delle corde fluide danno tanto più tardi cominciamento e fine alle loro vibrazioni per la direzione della lunghezza, quanto sono più rimote dal corpo sonoro, nè, se questo continua a vibrarsi, si effettua in esse corde il transito da uno stato all' altro di quiete, da cui nelle corde solide dipende l' origine del terzo suono. In oltre non contengono punto alcuno, che prima o dopo non muovasi; e per conseguenza dalla quiete dei punti estremi (*Fig.* 41.) A, B, e dal moto di qualunque punto medio non si può dedurre, come nel numero XXVI. dello schediasma IV., il moto della corda totale A B, ed il suono ad essa conveniente.

Per ben intendere qualmente la mia spiegazione all' aria si accomodi, egli è d' uopo riflettere, che le particole aeree ugualmente lontane dal centro sonoro principiano e finiscono nel medesimo istante le oscillazioni. Fra sì fatte particole io considero quelle, che nel sensorio fanno impressione. Per opera dei suoni n, N espressi da numeri fra loro primi abbiano esse congiunta-

mente concepito le vibrazioni appropriate ai detti suoni, ed accadendo, che il loro aggregato, non altrimenti che nelle corde solide, ci spenda il tempo 1 nel far transito da uno stato all' altro di quiete, si sveglierà il suono 1 nell' orecchio.

Merita per tanto qualche moderazione quello, che ho scritto nel citato numero XXVI. dello Schediasma IV. Una corda d' aria fa una vibrazione nel tempo stesso, in cui il suono si propaga da una estremità all' altra della sua lunghezza, sopra di che veggasi lo Schediasma V. al numero III. Le due corde (*Fig.* 22.) E, F del violino producenti i suoni dinotati dai numeri n, N fra loro primi pongano in oscillazione le particole aeree contenute nel raggio sonoro BD, onde conforme ho dichiarato concepiscano anche la vibrazione propria del suono 1. Se nel tempo $\frac{1}{n}$ d' una vibrazione della corda E il suono scorre lo spazio $BS = \frac{L}{n}$, nel tempo $\frac{1}{N}$ d' una vibrazione della corda F passerà lo spazio $BI = \frac{L}{N}$, e nel tempo 1 lo spazio $AB = L$. Perciò le corde d' aria BS, BI, BA sono atte a rendere i suoni n, N, 1, ed io posso concepire, che la corda indefinita BD tremi divisa nelle tre specie di porzioni eguali a BS, BI, BA, e ne porti i suoni all' orecchio.

Non deggio tralasciar di notare, che fra gl' innumerabili raggi sonori, che partono dai punti per esempio E, F delle due corde del violino, quelli soli generano il terzo suono, che s' incontrano in un qualche punto B, il che (sendo uguale la velocità, con cui si propagano le voci gravi ed acute) segue sempre a pari lontananze EB, FB dai mentovati punti E, F. In tal guisa la particola B comincia nello stesso momento a vibrarsi in doppia forma, e c' impiega il tempo 1 a passare al susseguente stato di quiete. Diffondendosi la vibrazione sonora per la direzione BD media fra le due EB, FB, se in essa direzione si trova l' orecchio, sente mediante il raggio BD oltre i suoni n, N anche il terzo, che si esprime per l' unità. Conciossiachè fra i raggi, che dalle corde E, F vengono al sensorio, si contino rispettivamente pochi quelli, che sieno forniti della nominata condizione, il terzo suono ha da riuscire assai più fiacco dei due del violino, come di fatto l' esperienza ci manifesta.

VIII.

VIII. Ora egli è d' uopo provare, che i punti della corda conformata ad una delle curve, di cui ho data la costruzione, sono spinti dalle forze acceleratrici necessarie, acciocchè ne nasca la data mescolanza di suoni, e che la corda stessa nello vibrarsi si adatta sempre mai ad una curva di simile natura, che componendosi di curve semplici analoghe alle primitive, si determina col mezzo della mia costruzione. Mi ristrignerò a considerare l' unione di due soli suoni, potendosi collo stesso metodo progredire ai casi più composti.

La curva (*Fig.* 41) BEN2E2N3EA nasca dalla composizione conforme il mio metodo delle due BDC2DA, BGS2E2S3GA, alle quali conformandosi la corda AB, rende i suoni n, N: si cerca la forza acceleratrice del punto E riferita alla distanza dall' asse AB. Sia come nello Schediasma IV. $AB = L$, la massa della corda $= M$, il peso o forza, che la tende $= P$, $BH = x$, $HD = y$, e si ponga $HG = DE = q$. Al numero X. dello Schediasma IV. ho dimostrato, che qualunque sia la curva BEN2E2N3EA, la forza accelerante il punto E s' eguaglia alla quantità $\frac{LP}{Mdx^2}$ moltiplicata nella seconda differenza della minima ordinata $HE = y + q$: ma nel nostro caso la predetta seconda differenza $= -ddy - ddq$: dunque la forza acceleratrice del punto E $= -\frac{LPddy}{Mdx^2} - \frac{LPddq}{Mdx^2}$. Dinotata la proporzione fra il raggio, ed il quadrante circolare per $\frac{C}{B}$, c' insegna il numero IV. del citato Schediasma, che alle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA competono l'equazioni $\frac{CL}{2nB} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = dx$, $\frac{CL}{2NB} \cdot \frac{dq}{\sqrt{G^2 - q^2}} = dx$, nelle quali C, G significano le massime loro saette. Prese le differenze nella supposizione consueta di dx costante, troveremo $-ddy = \frac{ydy^2}{C^2 - y^2}$, $-ddq$ =

$= \frac{q\,dq^2}{G^2 - q^2}$; e giacchè $C^2 - y^2 = \frac{C^2 L^2 dy^2}{4n^2 B^2 dx^2}$, $G^2 - q^2 = \frac{C^2 L^2 dq^2}{4N^2 B^2 dx^2}$, effettuate le sostituzioni, ci si presenterà

$-\frac{LPddy}{Mdx^2} = \frac{4n^2 B^2 Py}{C^2 LM}$, $-\frac{LPddq}{Mdx^2} = \frac{4N^2 B^2 Pq}{C^2 LM}$; e quindi

$-\frac{LPddy}{Mdx^2} - \frac{LPddq}{Mdx^2} = \frac{4n^2 B^2 Py}{C^2 LM} + \frac{4N^2 B^2 Pq}{C^2 LM}$ sarà la forza acceleratrice del punto E, la quale pareggia le due forze $\frac{4n^2 B^2 Py}{C^2 LM} = F$, $\frac{4N^2 B^2 Pq}{C^2 LM} = f$, che pel numero VII. dello Schediasma IV. accelerano i due punti corrispondenti D, G delle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA, alle quali accomodandosi la corda, rende i suoni solitarj n, N.

IX. M' immagino tre corde totalmente pari nella materia, lunghezza, grossezza, e tensione, e suppongo, che siano accomodate (*Fig.* 41) alle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA, BEN2E2N3EA; di modo che nel primo momento del moto alla stessa assissa BH corrispondano HD $= c$, HG $= g$, HE $=$ HD$+$DE $= c+g$. Poichè la forza del punto E s'eguaglia all' aggregato delle forze F, f dei punti D, G; ne segue che nel primo tempicello dt il punto E acquista una velocità V eguale alla somma delle velocità u, v dei punti D, G, e scorre uno spazio uguale alla somma degli spazj passati dai detti punti; e perciò facendosi eguali sottrazioni da quantità uguali, s' eguaglieranno i residui, ed anche nel cominciamento del secondo tempicello sarà, come richiede la mia costruzione, HE $=$ HD $+$ HG, e pel numero antecedente la forza del punto E pareggerà le forze F, f dei punti D, G. S' applichi il discorso ai susseguenti minimi tempi, e si conchiuda, che dopo il tempo t sarà $V = u + v$, HE $=$ HD $+$ HG conforme la mia costruzione addimanda, e la forza del punto E s' eguaglierà all' aggre-

aggregato delle forze dei punti D, G. Quindi se nel tempo inassegnabile dt i punti D, G camminano gli spazj $-dy$, $-dq$ proporzionali alle velocità u, v; dal punto E si passerà lo spazio $-dy-dq$ relativo alla velocità $V=u+v$. In oltre essendo pel numero XIV. del mentovato Schediasma

$$u=\pm\frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{c^2-y^2}}}{\sqrt{LM}},\ v=\pm\frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{g^2-q^2}}}{\sqrt{LM}},$$ scopriremo

$$V=u+v=\pm\frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{c^2-y^2}}}{\sqrt{LM}}\pm\frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{g^2-q^2}}}{\sqrt{LM}}.$$

Non si trascuri la conseguenza, che adattandosi costantemente pel numero IX. dello Schediasma IV. le due prime corde a curve di simil natura; questa proprietà si accomuna anche alla terza corda, la cui figura in qualunque istante si compone con quelle delle corde prima, e seconda.

X. Della velocità $V=u+v$ del punto E si può altresì stabilirne il valore col mezzo del metodo delle azioni, ch' è il vero metodo della Natura. Giacchè al numero VIII. ho trovato la forza acceleratrice del detto punto $=\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}+\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$, e che questa s' applica allo spazio elementare $-dy-dq$, avremo

$$\frac{4n^2B^2Py+4N^2B^2Pq}{C^2LM}.\overline{-dy-dq}=$$

$$\frac{4B^2P}{C^2LM}.\overline{-n^2ydy-n^2ydq-N^2qdy-N^2qdq}=VdV\ (*).$$

Abbiamo imparato nel numero antecedente, che i punti D, G scorrono nel medesimo tempo dt colla velocità u, v gli spazietti $-dy$, $-dq$, ed essendo pel numero XIV. dello Schediasma IV. $dt=\frac{C}{2B}\sqrt{\frac{LM}{P}}.\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}}$, $dt=\frac{C}{2B}\sqrt{\frac{LM}{P}}.$

$\frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$, ne risulta $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$; formola, da cui nascono le due seguenti $\frac{-nNydy\sqrt{g^2-q^2}}{\sqrt{c^2-y^2}} = -n^2ydq$, $\frac{-nNqdq\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{g^2-q^2}} = -N^2qdy$. Sostituisco nella equazione (*) in vece di $-n^2ydq$, $-N^2qdy$ gli scoperti valori, e mi si presenta $\frac{4B^2P}{C^2LM}$.

$$\overline{-n^2ydy - \frac{nNydy}{\sqrt{c^2-y^2}}\sqrt{g^2-q^2} - \frac{nNqdq}{\sqrt{g^2-q^2}}\sqrt{c^2-y^2} - N^2qdq}$$

$= VdV$, ed integrando coll' aggiunta delle necessarie costanti, acciocchè quando $V = o$, sia $y = c$, $q = g$,

$$\frac{4B^2P}{C^2LM}\cdot\overline{n^2\cdot\overline{c^2-y^2}+2nN\sqrt{c^2-y^2}\cdot\sqrt{g^2-q^2}+N^2\cdot\overline{g^2-q^2}} = V^2,$$

ed estraendo la radice,

$$\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}\cdot\overline{\pm n\sqrt{c^2-y^2}\pm N\sqrt{g^2-q^2}} = u + v = V,$$

ch' è quello stesso valore, che ho ritrovato di sopra al numero IX.

Avverto che i segni amendue affermativi s' adattano al caso, che l' una, e l' altra velocità componente u, v sia positiva, cioè a dire diretta da E verso H. Se tutte e due le dette velocità tendono da H verso E, servono i segni negativi. Ma se u ha la direzione EH, ed v l' HE, cadono in concio i segni positivo, e negativo, e se il contrario succede, vagliono i segni negativo, e positivo. I due ultimi casi, nei quali le velocità u, v, che compongono la V, sono contrarie, richiedono

dono le formole differenziali

$$\frac{4n^2B^2Py - 4N^2B^2Pq}{C^2LM} \cdot \overline{-dy+dq} = VdV,$$

$$\frac{-4n^2B^3Py + 4N^3B^2Pq}{C^2LM} \cdot + \overline{dy-dq} = VdV.$$

XI. Componendosi la velocità V del punto E delle due u, v dei punti D, G, i quali vibrandosi producono i suoni n, N; accade, che il detto punto concepisca congiuntamente due specie di oscillazioni, che i suoni n, N nell' orecchio risvegliano. Ella è cosa maravigliosa, ch' esistendo nel punto E la velocità composta, e non già le componenti; nulladimeno il sensorio ne formi un' idea talmente chiara, ch' oda i suoni distinti n, N. Un simile effetto accade talvolta nell' occhio. S' io rimiro dal lido un uomo, che cammina lungo una barca, la quale spinta dal vento si muove parallela al predetto lido, nettamente discerno nell' uomo la velocità propria, e quella, ch' ha colla barca comune. Valendomi anche in riguardo al punto E della teorica del moto traslato, posso concepire, che allo stesso punto s' imprima la velocità u dalla forza $F = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari $-dy$, e la velocità v dalla forza $f = \frac{4N^2B^3Pq}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari $-dq$, e che con quella velocità il suono n, e con questa il suono N si generi.

Nel presente numero, e nei tre precedenti ho sempre adattato i discorsi alla figura 41, e supposto cospiranti le forze F, f, e le velocità u, v. Egli è frattanto agevole l' applicarli agli altri casi. Se come nella figura 42, le mentovate forze, e velocità fossero contrarie, ne risulterebbe la forza del punto e da e verso H $= F - f$, He $=$ Hd $-$ ed, $V = u - v$.

XII. Le velocità componenti

$$u = \pm \frac{2nB}{C} \sqrt{\frac{P}{LM} \cdot \overline{c^2 - y^2}}, \quad v = \pm \frac{2NB}{C} \sqrt{\frac{P}{LM} \cdot \overline{g^2 - q^2}}$$

fo-

sono generalmente nulle, quando $y = \pm c$, $q = \pm g$, e ciò può accadere, o nel medesimo istante, o in diversi. Saranno nulle nello stesso istante, qualora la corda si trova in uno de' suoi stati di quiete, ed in tal caso avremo $V = o$. Negli altri incontri se farà nulla la velocità u, non sarà tale la v, o al contrario. In oltre la velocità u farà nulla in riguardo ai nodi, per esempio C, (*Fig.* 41.) che separano una parte $\frac{L}{n}$ dall' altra, e lo stesso dicasi della velocità v in riguardo ai nodi N, 2 N; e perciò rispettivamente al punto C sarà $V = v$, e rispettivamente ai punti N, 2 N, $V = u$. Finalmente la velocità V si annullerà, posto che si avveri la circostanza, che le due velocità componenti siano eguali, e contrarie, onde s' abbia $n\sqrt{c^2 - y^2} = N\sqrt{g^2 - q^2}$. Sopra di ciò terrò quanto prima nuovamente discorso. Ed intanto avverto, che formando l' orecchio una idea distinta delle velocità componenti u, v, non concepisce come stato di quiete del punto E quello, in cui le dette velocità sono eguali e contrarie, e la velocità assoluta $V = o$; ma riserba un tale giudicio alla circostanza, nella quale s' annullano tutte e tre le velocità mentovate, ed il riposo è comune alla corda intera.

XIII. Conciossiachè pel numero X. $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{-dq}{N\sqrt{g^2 - q^2}}$, avremo integrando $\frac{1}{n} S \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{1}{N} S \frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$, e per conseguenza $n : N :: S \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} : S \frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$. Rifletto essere $S \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ un arco di circolo diviso pel suo raggio, il cui coseno $= \pm y$, il qual arco si eguaglia ad un arco simile descritto col raggio $= 1$. Lo stesso discorso s' applichi a $S \frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$.

Coi

Coi raggi (*Fig.* 43.) IK $= g$, IL $= e$, IM $= 1$ si descrivano i tre circoli segnati nella figura, e tagliato ad arbitrio l' arco MR, si tiri il raggio IR, e pel punto Q, nel quale interseca il circolo LQI, si delinei QP normale ad Mm. Dallo stato di quiete della corda (*Fig.* 41, 43) BEN 2E2N3EA fino ad un dato istante sia passato il tempo rappresentato dall' arco MR, ed il punto E in riguardo alla velocità u, e per opera della forza $F = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$ avrà scorso lo spazio LP. Se come nella detta figura 41, anche la forza $f = \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ non altrimenti che la compagna spinge da principio il punto E per la direzione EH, si determini l' arco MRS, che stia all' arco MR come $n : N$, e condotto il raggio IS, che taglierà il circolo KOk nel punto O, si meni per esso la retta ON normale ad Mm, ed accaderà che nel tempo MR il punto E abbia viaggiato colla velocità v, ed a cagione della forza $f = \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ per lo spazio KN. Quindi il totale spazio, per cui si farà mosso da E verso H il punto E, pareggerà LP + KN.

Che se come nella figura 42 la forza $f = \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ nel cominciamento del moto è contraria all' altra $F = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$, e stimola il punto e da H verso d, si segni ms $=$ Ms, e tirate come sopra sI, on, sarà kn lo spazio corso dal punto e colla velocità negativa v; e perciò ne risulterà lo spazio assoluto per la direzione dH eguale ad LP $-$ kn.

In sì fatta guisa determineremo in ogn' istante il sito del punto E (*Fig.* 41), ovvero e (*Fig.* 42), e di qualunque altro, e potremo delineare la figura, a cui nel detto istante si adatta la corda.

XIV. Le seguenti avvertenze metteranno la cosa ancora più in chiaro. Gli spazj LP, KN, ovvero kn crescono fino alla

loro massima misura $Ll = 2c$, $Kk = kK = 2g$, indi calano fintantochè divengono nulli, e poscia tornano a crescere: e quante volte andando, e ritornando si percorrono gli spazj $2c$, $2g$, tante vibrazioni fa la corda come producente i suoni n, N.

Negli stati di quiete 1, 3, 5, &c. amendue gli spazj LP, KN, o pure kn eguagliano il nulla: ma negli stati di quiete 2, 4, 6, &c. saranno o tutti due massimi, se n, N sono numeri impari; o $LP = o$, e KN, ovvero $kn = 2g$, se n è pari, ed N impari; o $LP = 2c$, e KN, ovvero $kn = o$, se n è impari, ed N pari. Posto che i due numeri n, N sieno ambo pari, si dividano per la massima loro comune misura μ, e secondochè $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ saranno ambo impari, o il primo pari, e il secondo impari, o a rovescio, succederà quello, che ho testè stabilito, negli stati di quiete 2, 4, 6, &c.

La dimostrazione delle verità ennunciate dipende da ciò, che gli spazj LP, KN, o kn si annullano, quando la corda come divisa nel numero di parti n, N ha compiuto un numero pari di vibrazioni: ed al contrario pareggiano i massimi valori $2c$, $2g$, quando la corda stessa ha effettuato un numero impari di vibrazioni come divisa nei detti numeri di parti. Sia μ la massima comune misura dei numeri N, n, la quale s' eguaglia all' unità, s' essi numeri siano fra loro primi. Negli stati di quiete 1, 3, 5, &c. la corda ha fatto vibrazioni dell' una, e dell' altra specie o; $2\frac{n}{\mu}$, $2\frac{N}{\mu}$; $4\frac{n}{\mu}$, $4\frac{N}{\mu}$; &c.: e poichè $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ sono numeri interi, saranno sempre $2\frac{n}{\mu}$, $2\frac{N}{\mu}$; $4\frac{n}{\mu}$, $4\frac{N}{\mu}$; &c. numeri pari, qualunque valore o pari, o impari si attribuisca ai numeri n, N; e per conseguenza si eguaglieranno a nulla gli spazj LP, KN, ovvero kn. Ma negli stati di quiete 2, 4, 6, &c. avendo la corda terminato vibrazioni delle due specie $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c., si suppongano in primo luogo i numeri n, N ambo impari, e dovendo essere parimente impari la massima loro comune misura μ; ne segue necessariamente, che si annoverano fra gl' impari i numeri inte-

ri $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$, ed altresì $3\frac{n}{\mu}, 3\frac{N}{\mu}; 5\frac{n}{\mu}, 5\frac{N}{\mu}$; &c. laonde per la regola data LP$=2c$, KN, ovvero kn$=2g$. Che se n è pari, ed N impari, o al contrario, ha da contarsi fra i numeri dispari la massima loro comune misura μ, e seguitando $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}, 3\frac{N}{\mu}; 5\frac{n}{\mu}, 5\frac{N}{\mu}$; &c. la natura dei numeri n, N in riguardo all' esser pari, o dispari; si conchiuda essere LP$=o$, e KN, ovvero kn$=2g$ posto n pari, ed N impari; ed a rovescio LP$=2c$, e KN, ovvero kn$=o$ posto n impari, ed N pari. Resta che si consideri la circostanza, che n, ed N siano ambo numeri pari, nella quale la comune massima misura μ esser dee pari. Ora dividendo due numeri pari n, N per la massima comune misura μ altresì pari, ne possono risultare i quozienti $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ ambo impari, o quello pari e questo dispari, o all'opposto, e della stessa indole saranno $3\frac{n}{\mu}, 3\frac{N}{\mu}; 5\frac{n}{\mu}, 5\frac{N}{\mu}$, &c. Quindi nel primo caso LP$=2c$, KN, ovvero kn$=2g$, nel secondo LP$=o$, KN, ovvero kn$=2g$, e nel terzo LP$=2c$, KN, ovvero kn$=o$.

S' inferisca, che negli stati di quiete 1, 3, 5, &c. la corda è sempre fornita della medesima figura, e collocata nel medesimo sito. Lo stesso si affermi degli stati di quiete 2, 4, 6, &c.

XV. Aggiungo, ch' egli è sufficiente il determinare la figura della corda negl' istanti di mezzo fra il primo, ed il secondo stato di quiete; imperciocchè quando essa fa transito dal secondo stato di quiete al terzo, dal terzo al quarto, &c., ripiglia costantemente in qualunque dato sito la primiera figura. E vaglia il vero, (*Fig.* 41, 43) gli spazj LP, KN, ovvero kn passati dal punto E preso ad arbitrio hanno gli stessi valori, e mentre dal principio del moto è scorso il tempo MR, e mentre ci manca alla corda un egual tempo per giugnere agli stati di quiete 3, 5, 7, &c. Fra gli stati di quiete 1 e 3, 3 e 5, 5 e 7, &c. corre l' intervallo di tempo MRS2sm. $2\frac{n}{\mu}$, e sottraendo

il tempo MR, abbiamo l' avanzo $MRS2sm.2\frac{n}{\mu} - MR$, paſſato il quale, reſta ancora il tempo MR per arrivare ad uno degli ſtati di quiete in ſecondo luogo nominati. Fatto $M2R = MR$, l' iſtante ultimo del tempo $MRS2sm.2\frac{n}{\mu} - MR$ caderà in $2R$, poichè $MRS2sm.2\frac{n}{\mu}$ è un numero pari di ſemicircoli, ed all' arco $M2R$ non altrimenti che all' eguale MR corriſponderà lo ſteſſo ſpazio LP. Ora dee ſtabilirſi il ſito del punto $2S$, ovvero $2s$ relativo al $2R$. Si otterrà ciò pel numero XIII. col mezzo dell' analogia $n : N :: MRS2sm.2\frac{n}{\mu} - MR : MRS2sm.2\frac{N}{\mu} - MR.\frac{N}{n}$: e riflettendo eſſere $MRS2sm.2\frac{N}{\mu}$ un numero pari di ſemicircoli, ed $MR.\frac{N}{n} = MS = ms$ pel numero XIII., ſi tagli $M2S = MS$, ovvero $m2s = ms$, e chiaramente ſi ſcoprirà, che ad entrambe le dette coppie d' archi uguali ſi riferiſcono gli ſteſſi ſpazj KN, ovvero kn, e che qualſivoglia punto E della corda AB dopo i mentovati tempi MR, $MRS2sm.2\frac{n}{\mu} - MR$ ſi troverà nel medeſimo ſito diſtante da quello occupato nel primo ſtato di quiete per $LP + KN$, ovvero $LP - kn$. Quindi o paſſi la corda dal primo al ſecondo ſtato di quiete, o pure ſi mova dal ſecondo al terzo, dal quarto al quinto, &c., accetterà ſempre mai nel modo ſpiegato la medeſima ſerie di figure.

Che poi nel tranſito dal primo al ſecondo ſtato di quiete, dal terzo al quarto, dal quinto al ſeſto, &c. la corda prenda la ſteſſa progreſſione di figure, ella è coſa evidente; mercecchè accomodandoſi alla medeſima figura negli ſtati di quiete 1, 3, 5, &c., non v' ha ragione, per cui (preſcindendo dalle reſiſtenze) una ſerie debba differire dall' altra.

XVI. Si adatterà la corda alla figura confacente al ſuono ſolitario n, quando avendo compiute ſemivibrazioni 1, 3, 5, &c. proprie del ſuono N, (*Fig.* 41, 42, 43) ſarà $KN = KI = g$, ovvero $kn = kI = g$; e conſeguentemente $IN = DE = o$, ovvero $In = de = o$. L' ordinata HD ſarà poſitiva, o negativa, ſecon-

secondochè LP calerà, o crescerà posto al paragone con $LI = c$.

Negl' istanti, ne' quali avrà essa corda terminate semivibrazioni 1, 3, 5, &c. convenienti al suono n, si troverà conformata alla figura richiesta dal suono unico N, ed in tal circostanza sarà $LP = LI = c$; e perciò $PN = DH = o$. Anche qui l' essere DE positiva, o negativa, de negativa, o positiva dipende dalla grandezza in quel tal momento di KN, che sia minore, o maggiore di $KI = g$, e similmente di kn minore, o maggiore di $kI = g$.

Ma se n, N fossero numeri impari, nello stesso istante avrebbe la corda effettuate semivibrazioni $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c., e tutti i suoi punti sarebbero collocati nella linea retta ACB.

Eccettuati i casi notati, ne' quali le saette della corda, che oscilla divisa nei numeri di parti n, N, sono o quelle di una sola specie, o quelle di ambedue uguali a nulla; la figura della corda stessa si compone sempre delle due richieste dai suoni solitarj n, N: ed il valore positivo, o negativo di HD, DE, negativo, o positivo di de trae l'origine da quello delle linee relative LP, KN, ovvero LP, kn, conforme ho testè avvertito. Nel primo stato di quiete, o sia nell' istante M sieno date le curve componenti BDC2DA, BGS2E1S3GA, e conseguentemente ancora la curva composta BEN2E2N3EA, in cui all'assissa BH corrispondono $HD = LI = c$, $DE = KI = g$. La nostra costruzione c'insegna, che nel momento R sarà $DH = PI$, $ED = NI$. Ora verificandosi la condizione, che le ordinate delle curve del suono n corrispondenti alla stessa assissa negl' istanti M, R si riguardino nella proporzione $LI : PI$, e quelle del suono N nella proporzione $KI : NI$: egli è facile, essendo date le curve componenti, e la composta nell' istante M, il determinare nell' istante R tutte intere le curve predette. Quest' avvertenza vale anche per la descrizione della figura della nostra corda, quando negl' incontri sopra stabiliti ED, ovvero DH si eguaglia al nulla, e la corda si adatta all' una, o all' altra delle figure componenti.

Non tralascio di notare, che i nodi per esempio 2E della corda divisa nel numero n di parti si muovono, come se la cor-

corda rendesse l' unico suono N; e similmente i nodi per esempio N, 2 N della corda divisa nel numero N di parti si vibrano, come se dalla corda l' unico suono n venisse prodotto; laonde quelli sono sempre collocati in una curva propria del suono N, e questi in una curva propria del suono n.

XVII. Ho detto al numero XII., che la velocità assoluta V del punto E si annullerà, qualora le due velocità componenti u, v sieno uguali, e contrarie, onde s' abbia $n\sqrt{c^2-y^2} = N\sqrt{g^2-q^2}$. Per ottener ciò, egli è d' uopo primieramente, che se il punto R cade nel semicircolo M R S 2 s m, il punto S cada nel semicircolo m s 2 S 2 R M per esempio in s, o a rovescio; dimodochè sieno contrarie le velocità u, v, e se la direzione d' una è da L verso I, quella dell' altra sia da k verso I. In secondo luogo egli è necessario, che le ordinate $PQ = \sqrt{c^2-y^2}$, $no = -\sqrt{g^2-q^2}$ stiano fra loro come $\frac{1}{n} : \frac{1}{N}$, o sia in ragione inversa dei suoni n, N proprj delle vibrazioni per gli spazj $LI = 2c$, $kK = 2g$. La perdita totale di moto nel punto E, della quale si parla, diversa dall' altra comune a tutta la corda negli stati di quiete, dee succedere infallibilmente, quando nell' intervallo di tempo fra uno stato e l' altro di quiete della corda il punto E ha necessariamente da mutar direzione. Negli altri casi la detta perdita può avvenire, e non avvenire, secondo la varia proporzione di $LI = c$, $KI = g$.

XVIII. Ricorro ad un esempio per illustrar quanto basta la mia asserzione. Oscilli la corda congiuntamente divisa in parti eguali 2, e 3, conforme dimostra la figura 41, onde sia $n = 2$, $N = 3$. Fa transito essa corda da uno stato all' altro di riposo dopo due vibrazioni della corda bipartita, e tre della tripartita, ed in questo mezzo il punto E è costretto a mutar direzione. In fatti passati $\frac{2}{3}$ del tempo d' una vibrazione del suono n, eguali all' intero tempo d' una vibrazione del suono N, il punto E ha scorso per la direzione EH, o sia LI lo spazio

$LI + \frac{1}{2} II + Kk = \frac{3}{2} c + 2g$, e finite due vibrazioni del suono N, il detto spazio si ristringe alla misura $Kk = 2g$. Il punto E pertanto cangiata direzione è ritornato indietro, ed è passato per la quiete dal moto positivo al negativo, qualunque sia la proporzione fra c, e g.

Se MR pareggia due terze parti del semicircolo, ne risulta MRS uguale al semicircolo, ed il punto S coincide col punto m. Ma posto che MR s' eguagli al semicircolo, l' arco MRS diviene di tre quadranti, ed il punto S è collocato nel mezzo cerchio m s 2 S 2 R M. Acciocchè dunque il punto R sia nel semicircolo MRS 2 s m, ed il punto S nel semicircolo m s 2 S 2 R M, si rende necessario, che la grandezza dell' arco MR stia di mezzo fra due terzi di semicircolo, ed il semicircolo intero. Quindi il punto E ha da pervenire alla quiete in un tempo maggiore di due terze parti del tempo d' una vibrazione del suono n, e minore del tempo d' una vibrazione intiera.

La determinazione del detto tempo dipende dalla proporzione fra c, e g. Giunga per esempio il punto E alla quiete, quando sia (*Fig.* 41., *e* 44.) MR uguale a $\frac{4}{5}$ di semicircolo, MRmS uguale a $\frac{6}{5}$. Essendo in tale incontro $mR = mS$, ne risulta $PQ : NO :: IQ = c : IO = g$; e perciò posta $PQ = \frac{c}{\mu}$, sarà $NO = \frac{g}{\mu}$. E giacchè esser dee $2PQ = 3NO$, avremo $2c = 3g$, o sia $c : g :: 3 : 2$; e quindi se c, e g si riguarderanno nella detta ragione, il punto E resterà privo di moto dopo $\frac{4}{5}$ del tempo d' una vibrazione del suono n. Si faccia l' osservazione, che cangiandosi la proporzione fra HD, DE = HG al crescere, o al calare dell' affissa BH, i varj punti della corda in tempi diversi pervengono al riposo, e per conseguenza la quiete del punto E nella presente circostanza non è comune nello stesso istante agli altri punti, e la corda non si trova in istato di quiete.

XIX. Il punto E può nuovamente rimaner senza moto, prima che la corda pervenga al secondo stato di quiete, ed acqui-

quisti la figura 42. Se ciò ha da poter succedere, il punto R dee ritrovarsi nel semicircolo m S M, esempigrazia in r, ed il punto S nel semicircolo M R m, esempigrazia in s, onde non sieno ancora compiute due vibrazioni del suono n, e tre del suono N. Fingasi che l' arco M R m S r superi d' un minimo $\frac{4}{3}$ di semicircolo, l' arco M R m S r M s supererà altresì due semicircoli per una minima quantità, a cui M s si eguaglierà. Avremo dunque in tal caso $pq = \frac{1}{2} c \sqrt{3}$, $no = \frac{g}{\infty}$; ed acciocchè succeda la quiete del punto E nell' istante r, dovrà avverarsi l' equazione $c\sqrt{3} = \frac{3g}{\infty}$, che determina g infinito in riguardo a c, o pure c nullo in riguardo a g.

Sia M R m S r uguale a tre mezzi semicircoli, e conseguentemente M R m S r M s uguale a due semicircoli ed un quarto, onde ne risulti r M uguale ad un quadrante, ed M s uguale a mezzo quadrante. Scopriremo $pq = c$, $no = \frac{g}{\sqrt{2}}$, e nell' istante r il punto E avrà fatto perdita di tutto il suo moto, purchè si adempia l' equazione $2c = \frac{3g}{\sqrt{2}}$, che si muta nell' analogia $c : g :: 3 : 2\sqrt{2}$, o prossimamente come $\frac{35}{33} : 1$.

Ma ponendo M R m S r $= \frac{8}{5}$ di semicircolo, ed M R m S r M s $= \frac{12}{5}$, è facile da vedersi essere r M $=$ M s $= \frac{2}{5}$, e che se $pq = \frac{c}{\mu}$, avremo $no = \frac{g}{\mu}$. Caderà la quiete del punto E nell' istante r, quando si verifichi la formola $\frac{2c}{\mu} = \frac{3g}{\mu}$, e perciò sia $c : g :: 3 : 2 :: \frac{3}{2} : 1$.

Dato che l' arco M R m S r sia $= \frac{5}{3}$ di semicircolo, l' arco M R m S r M s $= \frac{5}{2}$, e per conseguenza M r $= \frac{1}{3}$,

M s

$Ms = \frac{1}{2}$, troveremo $pq = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, $no = g$. Vogliasi che nel momento r il punto E si fermi, e dovrà essere $c\sqrt{3} = 3g$, ovvero $c : g :: \sqrt{3} : 1$, o prossimamente $\frac{26}{15} : 1$.

Finalmente sia minimo l'arco $Mr = 2dz$, onde si determini $mRs = 3dz$; ed essendo $pq = 2cdz$, $no = 3gdz$, avremo la quiete del punto E nell' istante r, che in questo incontro coincide coll' istante M, qualora si avveri l' equazione $4cdz = 9gdz$, che ci somministra l' analogia

$c : g :: 9 : 4 :: \frac{9}{4} : 1$. Avverto essere in questo caso $c : g :: \frac{1}{n^2} : \frac{1}{N^2}$, ed aggiungo, che generalmente il momento di riposo del punto E, che può immediatamente precedere il secondo stato di quiete, caderà nel detto stato, quando l' analogia premessa si adempia.

Pongo sotto gli occhi di chi legge la seguente tavoletta

Tempi, che principiano dal primo stato di quiete, e sono espressi per la durata d' una vibrazione del suono n, finiti i quali il punto E si ferma.	Proporzioni fra c, e g necessarie per ottenere nell' ultimo istante dei tempi qui accanto descritti la quiete del punto E.
$1 + \frac{1}{3}$	$0 : 1$
$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}} : 1$ prossimamente $\frac{35}{33} : 1$
$1 + \frac{3}{5}$	$\frac{3}{2} : 1$
$1 + \frac{2}{3}$	$\sqrt{3} : 1$ prossimamente $\frac{26}{15} : 1$
2	$\frac{9}{4} : 1$.

Da questa tavola si raccoglie, che se in un istante delle ultime due terze parti del tempo della seconda vibrazione del suono n il punto E ha da rimaner senza moto, egli è d'uopo, che la proporzione di $c:g$ sia minore di $9:4$. Ponendo la detta ragione maggiore di $9:4$, non si dà verun istante nel mentovato intervallo di tempo, in cui il punto E si fermi, il quale resta privo di velocità dopo due vibrazioni del suono n nell' istante M del secondo stato di quiete, non perchè le velocità u, v sieno eguali, e contrarie, ma perchè amendue pareggiano il nulla. Se il punto E dentro l' assegnato spazio di tempo si riduce in riposo in un dato istante, si trova collocato (*Fig.* 42.) da e verso d, e prima accelerandosi, e poscia ritardandosi ritorna in e ad esser privo di velocità, la qual privazione è comune a tutta la corda, che in tal momento è giunta al secondo stato di quiete.

Ricorriamo anche qui ad un esempio. Si stabilisca $c:g::3:2\sqrt{2}$, di modo che s' abbia $\frac{3g}{2\sqrt{2}}=c$, e per le cose dette in questo numero essendo $pq=c$, $no=\frac{g}{\sqrt{2}}$, scopriremo $Lp=c$, $Kn=g-\frac{g}{\sqrt{2}}$. Quindi nell' istante r, in cui il punto E si riduce in quiete, si trova esso lontano dal punto H (*Fig.* 41, 44) per $HD+DE-Lp-Kn$, cioè a dire per $c+g-c-g+\frac{g}{\sqrt{2}}=\frac{g}{\sqrt{2}}$: ma nel secondo stato di quiete (*Fig.* 42) si discosta dallo stesso punto H per $Hd-de$ $=c-g$; dunque la differenza di queste distanze sarà $\frac{g}{\sqrt{2}}-c+g=\frac{g}{\sqrt{2}}-\frac{3g}{2\sqrt{2}}+g=g-\frac{g}{2\sqrt{2}}$, sostituendo in cambio di c il suo valore, il quale prossimamente equivale a $\frac{64}{99}g$; e quindi evidentemente comprendesi, che nell' istante r il punto E è più rimoto dal punto H di quello sia il punto e per lo spazio mentovato.

XX. Ora è facile l' indagare i momenti di riposo del punto

to E, mentre la corda si trasferisce dal secondo al terzo stato di quiete, in cui ricupera la figura 41. Se nel transito dal primo stato di quiete al secondo il punto E ha perduto il moto totale negl' istanti (*Fig* 44.) R, r, e posciachè dal principio del moto sono passati i tempi MsR, MsRmSr; succederà una simile perdita, qualora per arrivare al terzo stato di quiete, restano tempi eguali ai predetti. In fatti giusto a quanto ho dimostrato al numero XV. in ambo queste coppie d' incontri avremo gli stessi spazj LP, KN; Lp, Kn, ai quali corrispondono, mutate soltanto le direzioni, le stesse ordinate PQ, NO; pq, no, e per conseguenza le stesse velocità n, v proporzionali nella prima coppia di casi ad n.PQ, N. NO, e nella seconda ad n.pq, N. no. Se dunque scorso il tempo MsR, ovvero MsRmSr dopo il primo stato di quiete, le velocità n, v sono eguali, e contrarie; lo stesso addiverrà, quando per giugnere al terzo stato di quiete ci manca un tempo eguale ad MsR, ovvero ad MsRmSr.

Sia nel solito esempio dei suoni $n=2$, $N=3$ MSR $=\frac{4}{5}$ del tempo di una vibrazione del suono n, MsRmSr $=\frac{8}{5}$, e seguirà pe' numeri XVIII., e XIX. il riposo del punto E nei momenti R, r, quando sia LI $=c$: KI $=g::3:2$. Dal tempo di quattro vibrazioni del suono $n=2$, o sia della corda bipartita impiegato nel passaggio dal primo al terzo stato di quiete, il qual tempo si esprima per $4t=\frac{20}{5}t$, si sottrino le quantità $\frac{8}{5}t$, $\frac{4}{5}t$, e ne risulteranno i tempi $\frac{12}{5}t=2t+\frac{2}{5}t$, $\frac{16}{5}t=3t+\frac{1}{5}t$ dopo il primo stato di quiete, e conseguentemente i tempi $\frac{2}{5}t$, $t+\frac{1}{5}t$ dopo il secondo stato di quiete, terminati i quali il punto E si riduce in riposo.

XXI. Ho sempre supposto, che la forza $F+f$ non imprima moto, salvochè alla particola E (*Fig*. 41.) della corda AB, ed ora è tempo di dimostrarlo. Quantunque la detta forza $F+f=\frac{4B^2P}{C^2LM}.n^2y+\frac{4B^2P}{C^2LM}.N^2y$ non serbi la proporzione

 dell'

dell' ordinata HE $=y+q$, nulladimeno è composta di due forze F, f, che stanno come le distanze HD $=y$, DE $=q$ dai punti medj H, D delle relative vibrazioni proprie della corda divisa nei numeri di parti n, N. Ora mentre la forza F sollecita l' elemento E per lo spazio $-dy$, non comunica moto all' altre particole, conforme ho provato al numero XII. dello Schediasma IV., e lo stesso succede, mentre la forza f stimola il detto elemento per lo spazio $-dq$; dunque la forza $F+f$ uguale all' aggregato delle due mentovate accelera soltanto il punto E.

XXII. Le cose dette della unione di due suoni si possono estendere agevolmente all' aggregato di suoni 3, 4, 5, 6, &c. La forza, che spinge il punto E, verrà composta da tante forze F, f, &c. quanto è il numero di suoni n, N, &c., o in quanti diversi numeri n, N, &c. di parti eguali divisa si vibra congiuntamente la corda. La forma delle nominate forze sarà

$\frac{4B^2P}{C^2LM}\cdot n^2y$; e quindi una forza particolare si eguaglierà alla co-

stante $\frac{4B^2P}{C^2LM}$ moltiplicata nel prodotto del quadrato del suono,

che le corrisponde, e della rispettiva distanza dal punto medio della vibrazione.

La velocità V nascerà dalla somma delle velocità u, v, &c. le quali si accomoderanno alla forma seguente $\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}\cdot$ $\pm n\sqrt{c^2-y^2}$, in cui $\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}$ è grandezza costante, n è il suono, o il numero di eguali porzioni, nel quale è partita la corda, c la distanza dal punto medio della vibrazione, quando $u=o$, ed y la lontananza dal detto punto in un dato istante.

Determineremo la figura della corda in qualsivoglia momento, valendoci di tanti circoli concentrici, i cui raggi (*Fig.* 43.) IL $=c$, IK $=g$, &c. quanti sono i suoni n, N, &c., ed usando l' artificio spiegato al numero XIII. non trascurate le avvertenze contenute nei numeri XIV. XV. e XVI. Ricordo nuovamente, che i simboli c, g, &c. dinotano le distanze

della

della particola E (*Fig.* 41.) dai punti medj delle rispettive vibrazioni, qualora le velocità u, v, &c. si eguagliano a nulla.

XXIII. Acciocchè si possa adoprare la formola $\overline{F+f+\&c.}\, ds = dV = du + dv + \&c.$, come ho fatto nel numero IX., o pure l'equivalente $\overline{F+f+\&c.}\, ds^2 = -ddy - ddq - \&c.$, ovvero, come nel numero X., $\overline{F+f+\&c.} - dy - dq - \&c. = VdV$, egli è d'uopo, che qualunque forza, per esempio F, stia in qualsivoglia istante come la distanza y dal punto medio della competente vibrazione; onde non si dia comunicazione di moto fra un elemento, e l'altro della corda. E giacchè una corda non può oscillare, salvo che intera, o divisa in parti eguali; si rende necessario, che due forze scelte ad arbitrio, esempigrazia F, f, si corrispondano come $n^2 y : N^2 q$, cioè a dire in ragione composta dei quadrati dei numeri delle parti eguali, nelle quali è divisa la corda, e delle rispettive lontananze dai punti medj delle vibrazioni; e quindi n^2, N^2 hanno da essere numeri quadrati presi dalla serie 1, 4, 9, 16, 25, &c. Queste riflessioni pongono in chiaro, che le predette formole somministrano soltanto le curve da me determinate, le quali sono equilibrate, e permanenti, conservando sempre la stessa natura, siccome quelle, che o si numerano fra le curve semplici, alle quali si accomoda la corda, quando rende un suono solo, o nascono dalla loro composizione, la quale per quanto si vibri la corda, sempre sussiste, e fa sì che in siti analoghi torni essa corda a ricuperare la primiera figura, prescindendo dalle resistenze.

Che se la corda si obbliga a prendere una figura diversa dalle stabilite, non avendo questa gli elementi equilibrati, si comunicano essi il moto, e la detta figura talmente si varia, che più non ritorna la corda a ripigliarla; e perciò merita il nome di sbilanciata, e di passaggiera. Mi serva d'esempio una corda costretta dalla penna d'un salterello a ripiegarsi in un angolo rettilineo. Lasciata in libertà tostamente s'incurva, nè alla pristina figura mai più s'adatta.

L'indagar poi in uno di questi casi il tempo impiegato dalla corda nel passare dal primo al secondo stato di quiete, e la figura della stessa in qualunque istante frapposto, lo giudico un problema difficilissimo: nè a tale impresa mi accingo, quanto ardua,

dua, altrettanto inutile alle musiche vibrazioni. Io sono persuaso, che la corda prestissimo si accomodi ad una figura equilibrata, e che l' irregolarità della prima vibrazione non riesca all' orecchio sensibile. Applicato un ostacolo leggiero al punto estremo S (*Fig.* 17) della terza parte BS della corda AB, ed eccitata coll' unghia al tremito la detta parte, il suono 3 proprio della corda divisa in tre parti eguali, che tosto si sente, fa toccare con mano, che col mezzo d' una prontissima comunicazione di moto si adatta essa corda alla figura 17. permanente, ed equilibrata, la quale per altro si unisce con altre figure, quando col suono predominante delle terze parti si accoppiano quelli delle loro parti aliquote, conforme di fatto succede.

IL FINE.

Vidit

Vidit D. Joannes Maria Vidarius Clericus Regularis S. Paulli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius, pro Eminentis. & Reverendis. Domino D. Vincentio Card. Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 2. Aprilis 1767.

IMPRIMATUR.

F. Joseph Maria Pettoni Vic. Gen. S. Off. Bononiæ.

Tav. I.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

Tav. II.
a
c
d
b
Fig. 10.
C
Fig. 13.
I
D
H
Q
F
E
P
M
C
O
B'
N
I
R
D
y
H
G
Q
F
A
E
K
B
i
r
d
h
Fig. 14.

Tav.III.
Fig.19.
Fig.20.

Tav. IV.
M
N
O
A
K
H
B
m
n
o
Fig. 25.
C
A
C
2
3
E
D
B
D
Fig. 26.
G
M
I
Fig. 27.
O
m
i
g
B
a
h
b
d
q
Fig. 28.
g
e
c

Tav.V.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.

Tav.VI.
H
G
C
h
F 2D
E
2A
2d
2F3D
2f 3d
B
Fig. 34.
N3R
4R
2N5R
4S
Fig. 35.
F
2F
E
B
Fig. 37.

Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 44.